Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1B
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 14 settembre 2022

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che se A è una matrice simmetrica nilpotente allora $A = 0$.

b) Mostrare che se A è una matrice antisimmetrica nilpotente allora $A = 0$.

c) Mostrare che se A è una matrice antisimmetrica e $v \in \mathbb{R}^n$ appartiene a $\ker A^2$ allora $v \in \ker A$.

Esercizio 2. Sia F_α l'endomorfismo di $\mathbb{Q}^4$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare i sottospazi invarianti di F_α al variare di $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Sia $A \in M_5(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ una matrice antisimmetrica a coefficienti nel campo con 5 elementi. Supponiamo $rg(A) = 4$. Dire se esistono, e in caso affermativo dire quante sono, le matrici $C \in GL_5(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ tali che

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Esercizio 4. Sia β una forma bilineare riflessiva sullo spazio vettoriale V, e sia $\phi \in V^*$. Diciamo che ϕ è rappresentabile da β se esiste un vettore $v_\phi \in V$ tale che

$$\beta(u, v_\phi) = \phi(u), \ \ \forall u \in V.$$

a) Mostrare che l'insieme degli elementi rappresentabili da β è un sottospazio vettoriale di V^*.

b) Caratterizzare l'insieme degli elementi rappresentabili da β in termini di $rad\beta$ e $Ker\phi$.

c) Calcolare la dimensione del sottospazio degli elementi rappresentabili da β.