Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1 B - V appello
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 16 Gennaio 2024

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Mostrare che la classe di similitudine di una matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ è completamente determinata dal polinomio caratteristico e dal polinomio minimo di A.

Esercizio 2. Sullo spazio $V = M_n(\mathbb{R})$ si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\beta(A, B) = tr(AB) - tr(A)tr(B)$$

e siano $\mathcal{A}$ il sottospazio di V delle matrici antisimmetriche, $\mathcal{S}$ il sottospazio di V delle matrici simmetriche a traccia nulla e $\mathcal{L} = span\{I_n\}$.

a) Mostrare che i sottospazi $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$ sono ortogonali rispetto a β.

b) Calcolare la segnatura di β.

c) Posto $n = 3$ determinare un sottospazio di V isotropo massimale rispetto a β.

Esercizio 3.

a) Sia $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ una matrice triangolare a blocchi e siano $q_X(t)$, $q_A(t)$, $q_C(t)$ i polinomi minimi delle matrici X, A e C, rispettivamente. Mostrare che $q_X(t)$ divide $q_A(t)q_C(t)$.

b) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia W un sottospazio f-invariante di V. Mostrare che se esiste un vettore ciclico $v \in V$ per f allora esiste un vettore ciclico per l'endomorfismo $[f]$ indotto da f su V/W. Dedurre, usando a), che esiste un vettore ciclico $w \in W$ per $f|_W$.

Esercizio 4.

a) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $f \in End(V)$. Mostrare che f è diagonalizzabile se e solo se esiste un prodotto scalare su V rispetto al quale f è autoaggiunto. Tale prodotto scalare è unico?

b) Siano W_1, W_2, W_3 tre sottospazi distinti di uno spazio euclideo $(V, \langle , \rangle)$ non nulli. Dare condizioni necessarie e sufficienti su questi sottospazi affinché esista un endomorfismo autoaggiunto g di V i cui autospazi siano esattamente W_1, W_2, W_3. Fissati tre sottospazi W_1, W_2, W_3 di $\mathbb{R}^4$ soddisfacenti le condizioni stabilite sopra, costruire un endomorfismo autoaggiunto di $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard avente W_1, W_2, W_3 come autospazi relativi, rispettivamente, agli autovalori 0,1,-1.