Domande preliminari:

- Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalizzabili nilpotenti. Allora A e B sono simili.

VERO Se A è diagonalizzabile

$$A = H \Delta H^{-1} \qquad H \in GL_n(\mathbb{K}),\ \Delta \text{ diagonale.}$$

se A è nilpotente $\exists N$ t.c. $A^N = 0$.

$$0 = A^N = \underbrace{(H\Delta H^{-1})(H\Delta H^{-1}) \cdot \ldots \cdot}_{N \text{ volte}} = H\Delta^N H^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta^N = 0 \quad \text{ma se } \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta^N = \begin{pmatrix} \lambda_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^N \end{pmatrix}. \text{ Quindi } \Delta = 0$$

e $A = 0$. Quindi A NILP. DIAGONALIZZ $\iff A = 0$. Perciò A e B sono addirittura uguali.

• Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V e $f, g \in End(V)$: $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}(g)$ $\Rightarrow f = g$.

FALSO : Es. $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

f l'unico endom t.c. $f(v_1) = -v_1$
$f(v_2) = v_2$

g l'unico endom t.c. $g(v_1) = v_1$
$g(v_2) = -v_2$

$f \neq g$ chiaramente.

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1\}$

$M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

· Siano $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ in V^*

φ_1, φ_2 sono L.D. $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$

<u>VERO</u>

Oss.

Poiché $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ $\dim \operatorname{Ker}\varphi_1 = \dim \operatorname{Ker}\varphi_2$
$= \dim V - 1$.

$\Rightarrow$ se φ_1, φ_2 sono L.D. $\exists \alpha \neq 0$

t.c. $\varphi_1 = \alpha \varphi_2$.

$v \in \operatorname{Ker}\varphi_1 \Longleftrightarrow \varphi_1(v) = 0 \Longleftrightarrow \alpha\varphi_2(v) = 0$
$\Longleftrightarrow \varphi_2(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in \operatorname{Ker}\varphi_2$.

$\Leftarrow$ Sia $\{v_1 \dots v_{n-1}\}$ base di $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$. Completiamo a $\{v_1, \dots v_n\}$. $\varphi_1(v_n) \neq 0$, $\varphi_2(v_n) \neq 0$

e $\varphi_2 = \dfrac{\varphi_2(v_n)}{\varphi_1(v_n)} \cdot \varphi_1$ poiché mentre e sx e e dx coincidono su $v_1 \dots v_n$.

Es. 1

Sia $\{v_1 \dots v_{n-1}\}$ base di $\operatorname{Ker} f$ $\left(f \neq 0 \text{ perché } f(w) \neq 0 \right)$

$w \notin \operatorname{Ker} f$ quindi $\{v_1 \dots v_{n-1}, w\}$ è una base.

$$L(v_i) = v_i \quad \text{per } i = 1 \dots n-1$$

$$L(w) = (1 + f(w))\, w.$$

Quindi $\{v_1 \dots v_{n-1}, w\}$ è una base di autovettori.

Es. 2

Osserviamo che $W_1 \cap W_2$ è f-invariante in quanto intersezione di f-inv.

$p_{f|_{W_1 \cap W_2}}$ divide $p_{f|_{W_1}}$

quindi $f|_{W_1 \cap W_2}$ è

triangolarizza.

$$p_{f|_{W_1}} \Big/ p_{f|_{W_1 \cap W_2}} = p_{[f]_{W_1 / W_1 \cap W_2}}$$

ha ancora radici nel campo.
quindi è triangolarizza.

Segue, come nel teorema di triangolarizz. esiste una base $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_e\}$ di W_1

con $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di $W_1 \cap W_2$

che triangola $f|_{W_1}$.

Analogamente esiste una base $\{\underbrace{v_1, \dots, v_k}, u_{k+1}, \dots, u_r\}$ di W_2

gli stessi di prima!

che triangola $f|_{W_2}$.

$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_e, u_{k+1}, \dots, u_r\}$

$\Rightarrow$ è una base di V (Grassman)

che triangola f.

Es. 2 b.

Due modi:

1) per il teorema sull'indip. lineare sappiamo che gli autospazi V_λ di f sono in somma diretta. Per mostrare che f diagonalizz basta vedere che $V = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}$

cioè ogni v è somma di autovettori. Ma $V = W_1 + W_2$ quindi $v = v' + v''$ con $v' \in W_1$ e $v'' \in W_2$.

$f_{|W_1}$ è diagonalizz $\Rightarrow v'$ è

somma di autovettori.
Analogamente $v'' \in W_2$, $f_{|W_2}$ è diagonalizz quindi

v'' è somma di autovettori.
Segue che $v' + v''$ è somma di autovettori.

II° modo (+ istruttivo?)

Abbiamo mostrato:
Se $U \subseteq V$ è f invariante e f è diagonalizzabile $\Rightarrow f_{|U}$ è diagonalizzabile

ma, più precisamente,
$U = \bigoplus U \cap V_{\lambda_i}$.

quindi se W_{1,λ_i} sono gli autospazi di $f_{|W_1}$ (analog. W_{2,λ_i} ...) si ha

$$f_{|W_1 \cap W_2} = \bigoplus \underbrace{(W_1 \cap W_2) \cap W_{1,\lambda_i}}_{= U_{\lambda_i}} = \bigoplus \overbrace{(W_1 \cap W_2) \cap W_{2,\lambda_i}}^{= U_{\lambda_i}} .$$

possiamo quindi prendere una base per ogni U_{λ_i} e completarla a una base di W_{1,λ_i}, lo stesso per W_{2,λ_i}. Si ottiene così una base di autovettori per $f|_{W_1+W_2} = f$.

Es. 3 Facciamolo subito in generale. $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{K}^4$

$\dim V_1 = \dim V_2 = 3$

$\dim V_1 \cap V_2 = 2$.

$\mathrm{Hom}(W, V_1 \cap V_2) = \mathrm{Hom}(W, V_1) \cap \mathrm{Hom}(W, V_2)$

$\mathrm{Hom}(W, V_1 + V_2) = \mathrm{Hom}(W, V_1) + \mathrm{Hom}(W, V_2)$

osserviamo che queste sono uguaglianze di ssv in $\mathrm{Hom}(W, \mathbb{K}^4)$

$f \in \mathrm{Hom}(W, V_1 \cap V_2)$: poiché

$V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$ e $V_1 \cap V_2 \subseteq V_2$

$f \in \mathrm{Hom}(W, V_1)$ e $f \in \mathrm{Hom}(W, V_2)$.

viceversa se $f \in Hom(W, V_1) \cap Hom(W, V_2)$ si ha che $\forall w \in W$ $f(w) \in V_1$ e $f(w) \in V_2$, quindi $f(w) \in V_1 \cap V_2$.

b). Osserviamo che

$$Hom(W, V_1) + Hom(W, V_2) \subseteq Hom(W, V_1 + V_2)$$

perché se $f_1 \in Hom(W, V_1)$,
$f_2 \in Hom(W, V_2)$

$$\Rightarrow f_1(w) + f_2(w) \in V_1 + V_2$$

$\forall w \in W$.

Basta quindi mostrare che le dimensioni dei due ssv coincidono e questo si vede facilmente prendendo una base

$\{v_1, v_2\}$ base $V_1 \cap V_2$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base V_1

$\{v_1, v_2, v_4\}$ base V_2.

Analogamente, basta mostrare che ogni $f \in \mathrm{Hom}(W, V_1 + V_2)$ si scrive $f = f_1 + f_2$ con

$f_1 \in \mathrm{Hom}(W, V_1)$

$f_2 \in \mathrm{Hom}(W, V_2)$.

Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ base di V_1 e $v_4 \in V_2$ t.c. $\{v_1 \ldots v_4\}$ base.

Sia π_1 la proiezione su V_1

π_2 " — — " $\mathrm{Span}\{v_4\}$.

$$\Rightarrow \quad f = \underbrace{\pi_1 \circ f}_{\in \, Hom(W, V_1)} + \underbrace{\pi_2 \circ f}_{\in \, Hom(W, V_2)}$$

Es. 4 $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$f(v_1) = v_2 \quad f(v_2) = v_1 + v_2 \quad f(v_3) = v_1 + v_2$

f esiste unico su $\mathbb{Q}^3$ perché $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base:

esprimiamo e_1, e_2, e_3 in funzione di questa base:

$e_2 = v_1 - v_2$, $e_1 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3)$

$e_3 = \frac{1}{2}(v_2 - v_3)$.

$$f(e_1) = v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = -v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_2$ $\quad v_2 = v_3$.

f esiste perché $f(v_2) = f(v_3)$ ma non è unico.

Completando v_1, v_2 a una base aggiungendo u_3

$f(u_3)$ è arbitrario quindi ci sono $2^3 = 8$ possibili funzioni.

Se vogliamo f suriettiva si deve avere $f(u_3) \notin \text{Span}\{f(v_1), f(v_2)\}$ quindi abbiamo $2^3 - 2^2 = 4$ possibilità.