Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello - TEMA A
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 Gennaio 2023

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Siano $f, g \in End(V)$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V tali che $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}(g)$. Allora $f = g$.
2. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrici nilpotenti, diagonalizzabili. Allora A e B sono simili.
3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano φ_1 e φ_2 elementi di V^*. Allora φ_1 e φ_2 sono linearmente dipendenti se e solo se $\ker(\varphi_1) \subseteq \ker(\varphi_2)$ o $\ker(\varphi_2) \subseteq \ker(\varphi_1)$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n ed $f \in V^*$. Sia w un vettore di V tale che $w \notin \ker(f)$. Si consideri l'applicazione $L : V \to V$ definita da:

$$L(v) = v + f(v)w.$$

a) Verificare che L è lineare.

b) Stabilire se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e f un endomorfismo di V. Siano W_1, W_2 sottospazi f-invarianti di V tali che $V = W_1 + W_2$. Supponiamo che le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ abbiano tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.

a) Stabilire se f è triangolabile.

b) Se le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ sono diagonalizzabili, è vero che anche f è diagonalizzabile?

Esercizio 3. Siano V_1 e V_2 due sottospazi di $\mathbb{K}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$. Mostrare che:

a) $Hom(\mathbb{K}^5, V_1 \cap V_2) = Hom(\mathbb{K}^5, V_1) \cap Hom(\mathbb{K}^5, V_2)$;

b) $Hom(\mathbb{K}^5, V_1 + V_2) = Hom(\mathbb{K}^5, V_1) + Hom(\mathbb{K}^5, V_2)$;

Cosa succede alle relazioni a) e b) se si sostituisce $\mathbb{K}^5$ con un qualunque spazio vettoriale W di dimensione n?

Esercizio 4. In $\mathbb{K}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{K}^3$ tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_1 + v_2$, $f(v_3) = v_1 + v_2$. In caso affermativo stabilire se f è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$. Stabilire se esiste un endomorfismo g di $\mathbb{K}^3$ tale che $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = v_1 + v_2$, $g(v_3) = v_1 + v_2$. In caso affermativo stabilire se g è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e, nel caso non lo sia, stabilire quanti endomorfismi di $\mathbb{K}^3$ soddisfano le condizioni richieste. Quanti sono gli endomorfismi suriettivi di $\mathbb{K}^3$ soddisfacenti le condizioni richieste?

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello - TEMA B
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 Gennaio 2023

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Sia $f \in End(V)$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V tali che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = I_n$. Allora $f = id_V$.
2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ e siano φ_1 e φ_2 elementi non nulli di V^*. Allora φ_1 e φ_2 sono linearmente indipendenti se e solo se $\ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2)$ ha dimensione $n-2$.
3. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrici nilpotenti. Se A e B sono diagonalizzabili allora sono simili.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n ed $f \in V^*$. Sia w un vettore di V tale che $w \notin \ker(f)$. Si consideri l'applicazione $L : V \to V$ definita da:

$$L(v) = v + f(v)w.$$

a) Verificare che L è lineare.

b) Stabilire se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e f un endomorfismo di V. Siano W_1, W_2 sottospazi f-invarianti di V tali che $V = W_1 + W_2$. Supponiamo che le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ abbiano tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.

a) Stabilire se f è triangolabile.

b) Se le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ sono diagonalizzabili, è vero che anche f è diagonalizzabile?

Esercizio 3. Siano V_1 e V_2 due sottospazi di $\mathbb{K}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$. Mostrare che:

a) $Hom(\mathbb{K}^4, V_1 \cap V_2) = Hom(\mathbb{K}^4, V_1) \cap Hom(\mathbb{K}^4, V_2)$;

b) $Hom(\mathbb{K}^4, V_1 + V_2) = Hom(\mathbb{K}^4, V_1) + Hom(\mathbb{K}^4, V_2)$;

Cosa succede alle relazioni a) e b) se si sostituisce $\mathbb{K}^4$ con un qualunque spazio vettoriale W di dimensione n?

Esercizio 4. In $\mathbb{K}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{K}^3$ tale che $f(v_1) = v_2 + v_3$, $f(v_2) = v_1$, $f(v_3) = v_1 + v_2$. In caso affermativo stabilire se f è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$. Stabilire se esiste un endomorfismo g di $\mathbb{K}^3$ tale che $g(v_1) = v_2 + v_3$, $g(v_2) = v_1$, $g(v_3) = v_1 + v_2$. In caso affermativo stabilire se g è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e, nel caso non lo sia, stabilire quanti endomorfismi di $\mathbb{K}^3$ soddisfano le condizioni richieste. Quanti sono gli endomorfismi suriettivi di $\mathbb{K}^3$ soddisfacenti le condizioni richieste?

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello - TEMA C
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 Gennaio 2023

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Sia $\mathcal{D}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ diagonalizzabili e siano $A, B \in \mathcal{D}$ matrici nilpotenti. Allora A e B sono simili.

2. Siano $f, g \in End(V)$ e sia $\mathcal{B}$ una base di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f) \neq M_{\mathcal{B}}(g)$. Allora $f \neq g$.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano φ_1 e φ_2 elementi non nulli di V^*. Allora φ_1 e φ_2 sono linearmente dipendenti se e solo se $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n ed $f \in V^*$. Sia w un vettore di V tale che $w \notin \ker(f)$. Si consideri l'applicazione $L : V \to V$ definita da:

$$L(v) = v + f(v)w.$$

a) Verificare che L è lineare.

b) Stabilire se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e f un endomorfismo di V. Siano W_1, W_2 sottospazi f-invarianti di V tali che $V = W_1 + W_2$. Supponiamo che le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ abbiano tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.

a) Stabilire se f è triangolabile.

b) Se le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ sono diagonalizzabili, è vero che anche f è diagonalizzabile?

Esercizio 3. Siano V_1 e V_2 due sottospazi di $\mathbb{K}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$. Mostrare che:

a) $Hom(\mathbb{K}^3, V_1 \cap V_2) = Hom(\mathbb{K}^3, V_1) \cap Hom(\mathbb{K}^3, V_2)$;

b) $Hom(\mathbb{K}^3, V_1 + V_2) = Hom(\mathbb{K}^3, V_1) + Hom(\mathbb{K}^3, V_2)$;

Cosa succede alle relazioni a) e b) se si sostituisce $\mathbb{K}^3$ con un qualunque spazio vettoriale W di dimensione n?

Esercizio 4. In $\mathbb{K}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{K}^3$ tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_1$, $f(v_3) = v_1+v_2+v_3$. In caso affermativo stabilire se f è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$. Stabilire se esiste un endomorfismo g di $\mathbb{K}^3$ tale che $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = v_1$, $g(v_3) = v_1+v_2+v_3$. In caso affermativo stabilire se g è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e, nel caso non lo sia, stabilire quanti endomorfismi di $\mathbb{K}^3$ soddisfano le condizioni richieste. Quanti sono gli endomorfismi suriettivi di $\mathbb{K}^3$ soddisfacenti le condizioni richieste?

Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 1A - I appello - TEMA D
Docenti: Luca Migliorini, Nicoletta Cantarini
Bologna, 9 Gennaio 2023

Quesiti preliminari. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Gli spazi vettoriali sono tutti di dimensione finita.

1. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia id_V l'endomorfismo identità. Allora per ogni coppia di basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V si ha $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) = I_n$.
2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano φ_1 e φ_2 elementi non nulli di V^*. Allora, se $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$, si ha $\varphi_1 = \varphi_2$.
3. Per ogni numero naturale n esiste un'unica classe di similitudine di matrici nilpotenti diagonalizzabili $n \times n$.

Esercizi. Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n ed $f \in V^*$. Sia w un vettore di V tale che $w \notin \ker(f)$. Si consideri l'applicazione $L : V \to V$ definita da:

$$L(v) = v + f(v)w.$$

a) Verificare che L è lineare.

b) Stabilire se L è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e f un endomorfismo di V. Siano W_1, W_2 sottospazi f-invarianti di V tali che $V = W_1 + W_2$. Supponiamo che le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ abbiano tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.

a) Stabilire se f è triangolabile.

b) Se le restrizioni $f_{|W_1}$ e $f_{|W_2}$ sono diagonalizzabili, è vero che anche f è diagonalizzabile?

Esercizio 3. Siano V_1 e V_2 due sottospazi di $\mathbb{K}^4$ di dimensione 3 tali che $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$. Mostrare che:

a) $Hom(\mathbb{K}^2, V_1 \cap V_2) = Hom(\mathbb{K}^2, V_1) \cap Hom(\mathbb{K}^2, V_2)$;

b) $Hom(\mathbb{K}^2, V_1 + V_2) = Hom(\mathbb{K}^2, V_1) + Hom(\mathbb{K}^2, V_2)$;

Cosa succede alle relazioni a) e b) se si sostituisce $\mathbb{K}^2$ con un qualunque spazio vettoriale W di dimensione n?

Esercizio 4. In $\mathbb{K}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{K}^3$ tale che $f(v_1) = v_2+v_3$, $f(v_2) = v_1-v_3$, $f(v_3) = v_1+v_2-v_3$. In caso affermativo stabilire se f è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$. Stabilire se esiste un endomorfismo g di $\mathbb{K}^3$ tale che $g(v_1) = v_2 + v_3$, $g(v_2) = v_1 - v_3$, $g(v_3) = v_1 + v_2 - v_3$. In caso affermativo stabilire se g è l'unico endomorfismo di $\mathbb{K}^3$ soddisfacente le condizioni richieste e, nel caso non lo sia, stabilire quanti endomorfismi di $\mathbb{K}^3$ soddisfano le condizioni richieste. Quanti sono gli endomorfismi suriettivi di $\mathbb{K}^3$ soddisfacenti le condizioni richieste?