Geometria 1A - Primo appello

Docenti: N. Cantarini, E. Fatighenti, F. Meazzini, L. Migliorini

8 Gennaio 2024

Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso e rispondere alla parte preliminare negli spazi predisposti. Risposte non motivate non riceveranno credito. **Non saranno accettate brutte copie.**

NOME.................................. COGNOME.. MATRICOLA....................

Domande preliminari Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni.

1) Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, e siano W_1 e W_2 due sottospazi f−invarianti. Allora $W_1 + W_2$ è f−invariante.

2) Sia $\{\psi_1, \psi_2\}$ la base duale di una base $\{v_1, v_2\}$ di uno spazio vettoriale V (di dimensione 2). Allora $\{\psi_1 + \psi_2, \psi_2\}$ è la base duale della base $\{v_1 + v_2, v_2\}$.

3) Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo nilpotente (nel senso che esiste un intero N positivo per cui $f^N = 0$). Allora $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 1$.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1 Sia $M_n(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti complessi. Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, poniamo

$$[A, B] := AB - BA.$$

Fissata una matrice non nulla $B \in M_n(\mathbb{C})$, consideriamo l'endomorfismo

$$f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

definito da $f(X) = [X, B]$.

a) Stabilire se f è invertibile.

b) Indicato con $W \subset M_n(\mathbb{C})$ il sottospazio vettoriale delle matrici a traccia nulla, stabilire se $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$.

c) Siano $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dimostrare che, se A e B hanno un autovettore in comune, allora $\det([A, B]) = 0$.

d) Posti $n = 3$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinare una base di $Kerf$. In questo caso l'endomorfismo f ha altri autospazi?

Esercizio 2 Siano $C, V, \mathcal{H}$ definiti come segue:

$$C = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{K}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}; \quad V = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{K}^3 \mid x - y - z = x + y + z = 0\};$$

$$\mathcal{H} = \{f \in End(\mathbb{K}^3) \mid f(C) \subseteq V\}.$$

a) Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}$ quando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

b) Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}$ quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

c) Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}$ quando $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) Per ciascuno dei casi precedenti stabilire se $\mathcal{H}$ contiene applicazioni iniettive.

Esercizio 3 Sia $V = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$, e consideriamo le seguenti triple di vettori di V date da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare l'esistenza (e in caso l'unicità) di $f : V \longrightarrow V$ tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$. Determinare inoltre se una eventuale f è iniettiva.

b) Determinare l'esistenza (e in caso l'unicità) di $g : V \longrightarrow V$ tale che $g(w_i) = v_i$ per $i = 1, 2, 3$. Determinare inoltre se una eventuale g è iniettiva.

c) Sia $\mathcal{H} := \{f : V \longrightarrow V \mid f(v_i) = v_i, \; i = 1, 2, 3\}$. Determinare la cardinalità di $\mathcal{H}$, e se $\mathcal{H}$ contiene applicazioni diagonalizzabili.

Esercizio 4 Si considerino le seguenti matrici $A, B_k \in M_3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_k = \begin{pmatrix} k & \frac{k-1}{3} & -2 - 2k \\ 0 & 1 & 6 + 6k \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se esistono valori di k per cui le matrici A e B_k sono simili.

b) Stabilire se esistono valori diversi k_1 e k_2 del parametro k tali che B_{k_1} sia simile a B_{k_2}.

c) Data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare, se possibile, una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH = C$.