Geometria 1A - Secondo appello

Docenti: N. Cantarini, E. Fatighenti, F. Meazzini, L. Migliorini

29 Gennaio 2024

Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso e rispondere alla parte preliminare negli spazi predisposti. Risposte non motivate non riceveranno credito. **Non saranno accettate brutte copie.**

NOME.................................. COGNOME.. MATRICOLA.....................

Domande preliminari Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni.

1) Siano $M, N \in M_n(\mathbb{K})$. Se MN è diagonalizzabile, allora almeno una tra M e N è diagonalizzabile.

2) Siano A e B due matrici quadrate simili. Se A è simmetrica, allora B è simmetrica.

3) Siano $f : V \to W$ e $g : W \to U$ due applicazioni lineari. Se $g \circ f$ è iniettiva allora $Ker\, g \cap Im f = \{0\}$.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1 Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con base fissata $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\lambda, k \in \mathbb{K}$ e $\phi_k : V \longrightarrow V$ un endomorfismo definito dalle seguenti condizioni:

1. $U = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ è un autospazio per ϕ_k di autovalore $\lambda \neq 0$;
2. $\phi_k(v_3) = kv_3$;
3. $\phi_k(v_4) = kv_3 + v_4$.

a) Determinare i $k \in \mathbb{K}$ per cui ϕ_k è invertibile.

b) Determinare i $k \in \mathbb{K}$ per cui ϕ_k è diagonalizzabile.

c) Per i valori di k per cui ϕ_k è diagonalizzabile, determinare una scomposizione in somma diretta di V in autospazi per ϕ_k, esibendo una base per ciascun autospazio.

Esercizio 2 Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n > 1$, con $rg(A) = 1$.

a) Determinare se A è nilpotente.

b) Dimostrare che A è diagonalizzabile se e solo se $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

c) Stabilire se nel caso $rg(A) = 2$ vale almeno una delle due implicazioni precedenti.

Esercizio 3 Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita non nulli su un campo $\mathbb{K}$ e $f \in Hom(V, W)$ iniettiva. Sia

$$\mathcal{S} = \{g \in Hom(W, V) \mid g \circ f \text{ è un isomorfismo.}\}$$

a) Mostrare che $\mathcal{S}$ non è un sottospazio vettoriale di $Hom(W, V)$.

b) Calcolare la dimensione di $Span\,\mathcal{S}$ in funzione di $\dim V$ e $\dim W$.

Esercizio 4 Siano V e W due $\mathbb{Q}$–spazi vettoriali di dimensione finita e siano $\phi \in End(V)$ e $\psi \in End(W)$ due endomorfismi diagonalizzabili con polinomi caratteristici rispettivamente:

$$p_\phi(X) = (1 - X)^2(2 - X)^3(3 - X)^3, \ \ p_\psi(X) = X^2(2 - X)^2(1 - X)^3.$$

Calcolare la dimensione di

$$\mathcal{H} = \{g \in Hom(V, W) \mid g \circ \phi = \psi \circ g\}.$$