Geometria 1A - Terzo appello

Docenti: N. Cantarini, E. Fatighenti, L. Migliorini

5 Giugno 2024

Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso e rispondere alla parte preliminare negli spazi predisposti. Risposte non motivate non riceveranno credito. **Non saranno accettate brutte copie.**

NOME.................................. COGNOME.. MATRICOLA.....................

Domande preliminari Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni.

1) Siano $f : V \to W$ e $g : W \to U$ due applicazioni lineari tali che $g \circ f$ è iniettiva. Allora $\ker g \cap Imf = \{0\}$.

2) Sia $f \in End(V)$. Se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che $Imf \subseteq W$ e $f_{|W} = id$ allora f è una proiezione.

3) Siano V uno spazio vettoriale e $f : V \to \mathbb{K}$ una funzione. Sia $V = V_1 \oplus V_2$. Se $f_{|V_1}$ e $f_{|V_2}$ sono lineari allora f è lineare.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1 Siano $f, g \in End(V)$ tali che $f \circ g = g \circ f$ e sia $n = \dim(V)$.

a) Mostrare che se f ha n autovalori distinti allora g è diagonalizzabile.

b) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

trovare, se possibile, una base di $\mathbb{Q}^3$ costituita da autovettori comuni ad A e B.

Esercizio 2 Si considerino i seguenti sottospazi di $V = \mathbb{K}^3$:

$$V_1 = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ V_2^b = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

e il sottospazio

$$\mathcal{H}_b = \{ f \in End(V) \mid f(V_1) \subseteq V_1, f(V_2^b) \subseteq V_2^b \}$$

di $End(V)$.

a) Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}_b$ al variare di b, per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

b) Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}_b$ al variare di b, per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 3 Sia $f \in End(V)$ e sia $f^* : V^* \to V^*$ l'applicazione definita come segue: per $\varphi \in V^*$,

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

a) Mostrare che se f è diagonalizzabile allora f^* è diagonalizzabile.

b) Stabilire se vale l'implicazione inversa.

Esercizio 4 Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n, f un endomorfismo di V e k un numero naturale tale che $0 < k < n$. Dimostrare che, se tutti i sottospazi vettoriali di V di dimensione k sono invarianti per f, allora $f = \lambda id$, per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.