

Geometria 1A - Quarto appello

Docenti: N. Cantarini, E. Fatighenti, L. Migliorini

4 Luglio 2024

Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso e rispondere alla parte preliminare negli spazi predisposti. Risposte non motivate non riceveranno credito. **Non saranno accettate brutte copie.**

NOME..... COGNOME..... MATRICOLA.....

Domande preliminari Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni.

1) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V . Allora esiste un unico $f \in \text{End}(V)$ tale che $f(v_i) = 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

2) Sia V un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale e siano $f, g \in \text{End}(V)$. Allora $\min\{rg(f), rg(g)\} \leq rg(f + g)$.

3) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/11$ e sia $f : \mathbb{K}^8 \rightarrow \mathbb{K}^6$ un'applicazione lineare tale che $\ker f$ abbia 121 elementi. Allora f è suriettiva.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1 Siano $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x, y, z, t)^T \in V \mid x + 2y - z = 0, 3y - t = 0\}$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si consideri l'endomorfismo L_A di $\mathbb{R}^4$.

- Mostrare che W è L_A -invariante.
- Calcolare autovalori e autospazi di L_A .
- Determinare una bandiera di sottospazi $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq V_4$ di $\mathbb{R}^4$ costituita da sottospazi L_A -invarianti tali che $V_j = W$ per qualche $j = 1, \dots, 4$.

Esercizio 2 Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Siano W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - 1$ e g un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ tale che la restrizione di g a W sia iniettiva. Stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ tale che $f^2 = 0$ e $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \ker(g)$.

Esercizio 3 Sia V uno spazio di dimensione finita $2k$ su $\mathbb{Q}$ e $f \in \text{End}(V)$. Supponiamo che V sia somma diretta di k sottospazi vettoriali $\{V_1, \dots, V_k\}$ di dimensione 2, f -invarianti, tali che l'endomorfismo indotto $f_i : V_i \rightarrow V_i$ abbia polinomio caratteristico $X^2 - 3X + 2$ per ogni i .

- Stabilire se f è diagonalizzabile.
- Calcolare gli autovalori di f e le loro molteplicità geometriche e algebriche.
- Mostrare che $f^2 - 3f + 2I = 0$.
- Determinare il numero di proiezioni contenute in $\text{Span}\{I, f\}$ e descrivere tali proiezioni.

Esercizio 4 Si considerino i seguenti sottospazi di $V = \mathbb{Q}^3$:

$$V_1 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, \quad V_2^b = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}\right\}$$

e il sottospazio

$$\mathcal{H}_b = \{f \in \text{Hom}(V, V^*) \mid f(V_1) \subseteq \text{Ann}(V_1), f(V_2^b) \subseteq \text{Ann}(V_2^b)\}$$

di $\text{End}(V)$. Calcolare la dimensione di $\mathcal{H}_b$ al variare di b .