

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si consideri l'endomorfismo L_A di $\mathbb{K}^4$.

- a) Determinare se L_A ammette un vettore ciclico.
- b) Calcolare autovalori e autospazi di L_A e discutere la diagonalizzabilità per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- c) Discutere la diagonalizzabilità di L_A per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 2 Sia $S(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$. Per ogni numero naturale $m \geq 1$ si consideri l'applicazione lineare $f_m : \mathbb{R}_{\leq m}[x] \rightarrow S(2)$ definita da: per ogni $p \in \mathbb{R}_{\leq m}[x]$,

$$f_m(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

- a) Si determinino i valori di m tali che f_m sia iniettiva.
- b) Si determinino i valori di m tali che f_m sia suriettiva.
- c) Fissato $m = 1$, si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ che verifichi le seguenti condizioni:
 - i) $g \circ f_1$ è iniettiva;
 - ii) $g(E_{12}) = 1 - 3x + 2x^2$;
 - iii) $g(S(2)) = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid p(3) = 0\}$.

Esercizio 3

- a) Sia $f \in \text{End}(V)$ tale che $V = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$. Dopo avere osservato che $\text{Im} f$ è un sottospazio f -invariante, si mostri che l'endomorfismo indotto da f su $\text{Im} f$ per restrizione è invertibile.
- b) Usando il punto precedente si mostri che se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, o più generalmente su un campo algebricamente chiuso, tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $V = \text{Ker}(f - \lambda I) \oplus \text{Im}(f - \lambda I)$ allora f è diagonalizzabile.
- c) Mostrare con un esempio che l'enunciato del punto b) non vale se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Esercizio 4 Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ un endomorfismo di $\mathbb{C}^n$ avente esattamente due autovalori $\lambda_1 \neq \lambda_2$ di molteplicità geometrica rispettivamente d_1 e d_2 . Sia

$$\mathcal{L} = \{W \subseteq \mathbb{C}^n \mid W \text{ è un sottospazio } f\text{-invariante e } f|_W \text{ è diagonalizzabile}\}.$$

Si determini l'intero $M = \max\{\dim(W) \mid W \in \mathcal{L}\}$; inoltre per ogni intero m tale che $1 \leq m \leq M$, si dica se esiste un sottospazio $W \in \mathcal{L}$ di dimensione m e se tale sottospazio è unico.