Geometria 1A - Sesto appello

Docenti: N. Cantarini, E. Fatighenti, L. Migliorini

9 settembre 2024

Giustificare le risposte in modo chiaro e conciso e rispondere alla parte preliminare negli spazi predisposti. Risposte non motivate non riceveranno credito. **Non saranno accettate brutte copie.**

NOME.................................. COGNOME... MATRICOLA.....................

Domande preliminari Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni.

1) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e $f \in End(V)$ tale che per ogni $v \neq 0$ si abbia $V = Span\{v\} \oplus Span\{f(v)\}$. Allora f non è diagonalizzabile.

2) Siano $f \in Hom(V,U)$ e $g \in Hom(U,W)$ tali che $g \circ f$ è iniettiva. Allora $\dim Im(g) = \dim U$.

3) Siano $\psi_1, \psi_2 \in V^*$. L'insieme $\{\psi_1, \psi_2\} \subset V^*$ è linearmente indipendente se e solo se $\ker \psi_1 + \ker \psi_2 = V$.

Risolvere tre dei seguenti quattro esercizi.

Esercizio 1 Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2 e per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$ si consideri l'applicazione lineare

$$L_A : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$$

$$L_A(X) = AX - XA.$$

a) Mostrare che se le matrici A e B sono simili allora $\dim(\ker(L_A)) = \dim(\ker(L_B))$.

b) Calcolare $\dim(\ker(L_A))$ nel caso in cui $A^2 = I_n$, $tr(A) = h$.

Esercizio 2 Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & h-1 & -1 \\ -1 & 0 & 2h & h \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{pmatrix}.$$

a) Determinare i valori di h tali che A_h sia diagonalizzabile.

b) Stabilire se esistono valori di h tali che la matrice A_h sia simile alla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Per ogni $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sia $f_{A,B} : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ l'applicazione definita da $f_{A,B}(X) = AX - XB$.

a) Verificare che $f_{A,B}$ è lineare.

b) Determinare l'insieme delle coppie $(A, B) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ per cui $f_{A,B} = 0$.

c) Mostrare che, se A e B sono simili, allora $f_{A,B}$ non è un isomorfismo.

d) Mostrare che se A e B sono diagonalizzabili allora $f_{A,B}$ è diagonalizzabile.

Esercizio 4 Siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione finita, $\dim V = n, \dim U = m, \dim W = p$ e $f \in Hom(V, U)$, $g \in Hom(U, W)$.

a) Mostrare che esistono basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W$, rispettivamente di V, U e W, tali che

$$M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_U}(f) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_l \end{pmatrix}, M^{\mathcal{B}_U}_{\mathcal{B}_W}(g) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0_s & 0 \\ 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & 0_q \end{pmatrix}.$$

b) Caratterizzare gli interi k, l, r, s, t, q in termini di dimensioni di nuclei e immagini di f e di g e delle loro intersezioni.