Domande Preliminari

1) VERO: Se $v \in W_1 + W_2 \Rightarrow$

$\exists\, v_1 \in W_1,\ v_2 \in W_2$ t.c. $v = v_1 + v_2$.

$f(v) = f(v_1) + f(v_2)$, ma $f(v_1) \in W_1$ per f-inv.
$f(v_2) \in W_2$ ''

$\Rightarrow f(v_1) + f(v_2) \in W_1 + W_2$

2) FALSO: es $(\varphi_1 + \varphi_2)(v_1 + v_2) = 2 \neq 1$.

3) VERO $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1 \Leftrightarrow f$ non è invertibile. Ma se f fosse invertibile anche f^N lo sarebbe

Es. 1

a) f non è invertibile perché $f(B) = 0$ e $B \neq 0$

b) Ogni matrice della forma $[X, B]$ ha traccia nulla

$$\mathrm{Tr}(XB - BX) = \mathrm{Tr}(XB) - \mathrm{Tr}(BX) = 0$$

e $\mathrm{Im} f$ è generata da matrici di questa forma.

c) Se $Av = \lambda v$ $Bv = \mu v$

con $v \neq 0$ $[A, B](v) = (\lambda\mu - \mu\lambda) v = 0$

quindi $[A, B]$ non è invertibile

e $\det([A, B]) = 0$

d) $\operatorname{Ker} f = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} : BX = XB \right\}$

$$BX = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} & x_{13}+x_{23} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix}$$

$$XB = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11}+x_{12} & 2x_{13} \\ x_{21} & x_{21}+x_{22} & 2x_{23} \\ x_{31} & x_{31}+x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix}$$

Uguagliando $\quad x_{21}=0 \quad x_{23}=0 \quad x_{31}=0$

$$x_{32}=0 \quad x_{13}=0$$

$x_{11}=x_{22}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\{E_{11}+E_{22}, E_{12}, E_{33}\}$$

Ci sono altri autospazi, e.g. E_{31} è autovettore di autovalore 1.

Ex 2

a) Se $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ $\quad C=\{0\}$

e $\dim V = 1$: ogni f lineare

è in $\mathcal{H}$. $\quad \dim \mathcal{H} = 9$

b) Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, C non è un SSV ma

$\mathcal{H} = \{ f : f(\operatorname{Span} C) \subseteq V \}$

$\operatorname{Span} C = \mathbb{C}^3$ perché

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ sono una base e stanno in C:

quindi $\mathcal{H} = \{ f : \operatorname{Im} f \subseteq V \}$.

Prendendo una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$

con $V = \operatorname{Span}\{v_1\}$

$f \in \mathcal{H} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim \mathcal{H} = 3$

c) su $\mathbb{Z}/_2$ $\quad x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$

quindi C è un ssv di dim 2

invece $x+y+z=x-y-z$

quindi $V\,(=C)$ ha dim 2.

Scelta v_1, v_2 base di V

e completata a $\{v_1, v_2, v_3\}=\mathcal{B}$

$f\in\mathcal{H}$ sse $M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ 0 & 0 & \circ \end{pmatrix}$

$\dim \mathcal{H}=7$

d) SI nei casi 1 e 3
N nel caso 2

Es. 3

Si ha la relazione

$$v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$$

mentre w_1, w_2, w_3 sono L I

a) Tale f non esiste perché una f lineare verifica

$$f(v_1 + 2v_2 + v_3) = 0$$

$$f(v_1) + 2f(v_2) + f(v_3) = 0$$

ma $w_1 + 2w_2 + w_3 \neq 0$.

b) g esiste ed è unica perché $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base

Poiché $\operatorname{Im} g = \operatorname{Span}\{g(v_1), g(v_2), g(v_3)\} =$

$= \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$

quindi g non è iniettiva

c) Completiamo v_1, v_2 a una base B aggiungendo un vettore: u

$f \in \mathcal{H}$ sse $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

quindi si hanno 5^3 possibili matrici.

$\mathcal{H}$ contiene appl. diagonalizzabili, ad esempio $f = id$

Esercizio 4

$$p_A(X) = (X-1)^2(X+1).$$

$\mu_a(1) = 2$ $\mu_g(1) = 1$ (calcolando

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} = 2).$$

mentre $\mu_a(-1) = \mu_g(-1) = 1$.

$$p_{B_k}(X) = (1-X)(K-X)(-K-X)$$

Se $K \neq \pm 1$, i polinomi caratteristici sono diversi quindi A e B_k non sono simili

$K=1$ $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B_1 - I$ ha rango 1

quindi $\mu_g(1) = 2$, e

B_1 è diagonalizzabile

$\left(\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right)$ quindi non simile ad A

Per $K = -1$ $B_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_{-1} - I$ ha rango 1 quindi

diagonalizzabile e non simile

ad A.

b) Per quanto visto sopra $B_1 \sim B_{-1}$

e in generale se $K_1 = \pm K_2$

B_{K_1} e B_{K_2} sono diagonalizzabili.

con lo stesso pol. caratteristico

c) Se un endomorfismo ha matrice C rispetto a una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, significa che

$f(v_1) = v_1 \qquad f(v_2) = v_1 + v_2 \quad f(v_3) = -v_3$

Quindi dobbiamo cercare una tale base per $f = L_A$.

v_1 deve essere autovettore di autoval. 1, cioè risolvere $(A - I)v_1 = 0$. Si trova ad es. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

v_3 è autovettore di autoval -1 cioè $(A+I)v_3 = 0$ e.g. $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Adesso cerchiamo $v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ t.c.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e si trova ad es. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} = v_2$

quindi $M_B(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \end{pmatrix} = C$

$$= M_B^C(id)\, \overset{A}{\overset{\|}{M_C(L_A)}}\, \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} = H}{\underset{\|}{M_C^B(id)}} = C$$