Geometria e Algebra Lineare 2024/25
Primo scritto

Luca Battistella, Nicoletta Cantarini, Roberto Pagaria

7 gennaio 2024

In questo compito tutti gli spazi vettoriali sono da intendersi di dimensione finita.

Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Siano V uno spazio vettoriale e U un suo sottospazio proprio. Allora esiste una base di V i cui vettori non appartengono a U.

2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^2$ ha 3 sottospazi (distinti) di dimensione uno.

3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione dispari. Allora ogni endomorfismo di V è triangolabile.

Esercizi

1. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 3 e sia $f\colon V \to V$ definita da $f(p(x)) = ((x+6)p(x))' = \frac{d}{dx}((x+6)p(x))$. Sia $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ una base di V.

   (a) Mostrare che f è un'applicazione lineare.

   (b) Determinare una base $\mathcal{D}$ di V composta da autovettori di f e determinare lo spettro di f (cioè l'insieme dei suoi autovalori).

   (c) Scrivere la matrice di cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{D}$ del punto precedente.

   Sia $g\colon V \to \mathbb{C}^2$ definita da $g(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a-c, b-d)^T$.

   (d) Scrivere le matrici $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)$, $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g)$ dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{C}^2$.

(e) Scrivere la matrice $M^{\mathcal{C}^\vee}_{\mathcal{D}^\vee}(g^T)$ dove g^T è l'applicazione trasposta di g e $\mathcal{C}^\vee$, $\mathcal{D}^\vee$ le basi duali.

2. Siano $b \in \mathbb{C}$ un parametro, $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -b-3 & b+2 & -1 \\ 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix}$$

e (v_1, v_2, v_3) la base duale della base canonica di $\mathbb{C}^3$. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{C}^3$:

$$H_1 = \mathrm{Z}(v_1 - v_2), \quad H_2 = \mathrm{Z}(v_1 + v_2) \quad H_3 = \mathrm{Z}(v_3).$$

(a) Quali dei tre sottospazi H_1, H_2 e H_3 sono L_A-invarianti per ogni $b \in \mathbb{C}$?

(b) Per quali valori di b la matrice A è triangolabile? e per quali è diagonalizzabile?

(c) Determinare per ogni sottospazio H_i L_A-invariante, per quali valori di b esso ammette un complementare L_A-invariante.

3. Sia $V = M_{2,3}(\mathbb{Q})$ lo spazio delle matrici 2×3 a coefficienti razionali e siano E_{ij} le matrici elementari in V. Siano poi U e W i sottospazi vettoriali di V così definiti:

$$U = Span\{E_{11}+E_{13}+E_{22}, E_{12}+E_{21}+E_{23}\},\ W = \{A \in V \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Sia $g \in V^*$ il funzionale definito da:

$$g(A) = \mathrm{tr}(A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

per ogni $A \in V$. Sia H il nucleo di g.

(a) Determinare una base di W e una base di H.

(b) Mostrare che $V = U \oplus W$ e calcolare le dimensioni di $H \cap W$ e $H \cap U$.

(c) Stabilire se esiste un endomorfismo f di V tale che $f(W) = W \cap H$, $U \cap H \subset \ker(f)$, $\dim \ker(f) = \dim(U)$. In caso affermativo costruire f.

4. Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensioni, rispettivamente, n e p con $n \geq p$ e siano V^* e W^* gli spazi duali di V e W. Fissato $f \in W^*$, $f \neq 0$, si consideri l'applicazione lineare $L : Hom(V, W) \to V^*$ definita da $L(g) = f \circ g$ per ogni $g \in Hom(V, W)$.

(a) Calolare $\dim KerL$.

(b) Sia $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$. Mostrare che per ogni intero $k \in \{1, \ldots, p\}$ esiste $g \in Hom(V, W)$ tale che $L(g) = \varphi$ e $\mathrm{rk}\, g = k$.