Geometria e Algebra Lineare 2024/25
Secondo appello

Luca Battistella, Nicoletta Cantarini, Roberto Pagaria

30 giugno 2025

In questo compito tutti gli spazi vettoriali sono da intendersi di dimensione finita. Indicheremo con e il numero di Nepero.

Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta.

1. Sia A una matrice quadrata invertibile. Si ha $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 17. Esiste un sottospazio $U \subset V$ tale che $\dim U = \dim \mathrm{Ann}(U)$.
3. Sia $B \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$ una matrice non nulla $B \neq 0$ nilpotente (cioè $B^N = 0$ per un qualche $N \in \mathbb{N}$). Allora B non è diagonalizzabile.

Esercizi

1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{K})$$
e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione 3.
   (a) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, per ogni base $\mathcal{B}$ di V esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = A$?
   (b) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, per ogni base $\mathcal{B}$ di V esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = A$?
   (c) Sia $\mathcal{C}_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Determinare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}_4}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & e \\ 3 & 4 & 6 & e^2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. In $\mathbb{K}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -14 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$$

$$W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x - w = 0, 2y + 2z - w = 0\right\}$$

   (a) Scrivere V in coordinate cartesiane e determinarne la dimensione.
   (b) Scrivere W in coordinate parametriche e determinarne la dimensione.
   (c) Determinare $V \cap W$ e la sua dimensione.
   (d) Determinare $V + W$ e la sua dimensione.

3. Sia $f\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ definita da

$$f(A) = \sum_{k=0}^{2025} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^{2025}}{2025!}.$$

   (a) La funzione f è lineare?
   (b) Dimostrare che per ogni $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e per ogni $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ si ha $f(GAG^{-1}) = Gf(A)G^{-1}$.
   (c) Diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

   (d) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per B.
   (e) Calcolare $f(B)$. Se necessario, usare l'approssimazione $\sum_{k=0}^{2025} \frac{1}{k!} \sim e$.