Foglio di esercizi numero 1
Geometria 1A

1. Sia V uno spazio vettoriale e siano $u, v, w \in V$ vettori tali che
$$v + u = v + w.$$
Mostrare che $u = w$.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^3$ siano dati i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Verificare che v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{Q}^3$.

3. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi $W_i \subset \mathbb{K}^3$ sono sottospazi di $\mathbb{K}^3$:
   a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $W_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0\}$.
   b) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e $W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z \leq 1\}$.
   c) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e $W_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.
   d) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ e $W_4 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

4. a) Dire per quali sottospazi W di $\mathbb{K}^n$ il complementare $\mathbb{K}^n \setminus W$ è a sua volta un sottospazio.
   b) Dire per quali sottospazi W di $\mathbb{K}^n$ il complementare $(\mathbb{K}^n \setminus W) \cup \{0\}$ è a sua volta un sottospazio.

5. Mostrare che $\{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{K}_{\leq 2}[x]$. È anche un insieme linearmente indipendente (cioè costituito da vettori linearmente indipendenti)?

6. Esibire un polinomio non nullo che si annulla su tutti gli elementi di $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

7. Mostrare che la somma e la moltiplicazione per gli elementi di $\mathbb{Q}$ definiscono su $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a+b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Esibire un insieme di generatori linearmente indipendenti di $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

8. (Ruffini) Ricordiamo che $\alpha \in \mathbb{K}$ si dice radice di $p \in \mathbb{K}[x]$ se $p(\alpha) = 0$. Mostrare che α è una radice di p se e solo se $(x - \alpha)$ divide p. (Suggerimento: per dimostrare che se α è una radice di p allora $(x - \alpha)$ divide p, usare la relazione $x = x - \alpha + \alpha$).

9. Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $S, T \subseteq A$ due sottoinsiemi. Dimostrare che:
   a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$,
   b) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$. Costruire un esempio in cui l'inclusione è stretta e un altro esempio in cui è un'uguaglianza.

10. Sia X un insieme finito. Mostrare che una funzione $f : X \to X$ è iniettiva se e solo se è suriettiva. Mostrare che questo fatto non è necessariamente vero se X è infinito.

11. Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V. Mostrare che $Span(v_1, \dots, v_h) \cap Span(v_{h+1}, \dots, v_k) = \{0\}$.

12. Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ suoi sottospazi. Mostrare che:

    a) $U \cap W$ è l'unione di tutti i sottospazi contenuti in U e W;

    b) $U + W$ è l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono U e W.