Foglio di esercizi numero 1
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Ingegneria Aerospaziale e Meccanica

Esercizio 1. Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w) \mid x + z = 0, 3y - w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) \mid x + z = 0, y + 2w = 0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinare $S \cap T$ e $S + T$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ costituito dalle funzioni da $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$ dove, se $f, g \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è la funzione così definita: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $x \in [-1, 1]$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di V:

- $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
- $W = \{f \in V \mid f(-1) = -1\}$;
- $R = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ se } x < 0\}$;
- $S = \{f \in V \mid f(x) \leq f(y) \text{ se } x \leq y\}$;
- $T = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \forall\, x \in [-1, 1]\}$.

Esercizio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare:

a) una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori riga di A;

b) una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori colonna di A.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (2, 2, 0, 3)$, $v_5 = (1, 0, 1, 1)$, $v_6 = (2, 0, 2, 0)$, $v_7 = (1, 7, 3, 2)$. Si dimostri che essi individuano un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ e si estragga una base di $\mathbb{R}^4$ dall'insieme $\{v_1, \ldots, v_7\}$.

Esercizio 5. Determinare l'intersezione e la somma delle seguenti coppie di sottospazi:

a) $W_1 = \langle(-2, 3, -2)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$;

b) $W_1 = \langle(1,-1,1)\rangle$, $W_2 = \langle(1,1,0),(1,2,1)\rangle$;

c) $W_1 = \langle(1,-1,1),(1,0,-1)\rangle$, $W_2 = \langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle$.

Esercizio 6. Trovare due sottospazi W_1, W_2 di $\mathbb{R}^3$ tali che $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$, ma $\mathbb{R}^3$ non è la somma diretta di W_1, W_2.

Esercizio 7. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0\}.$$

a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base di W.

c) Trovare due sottospazi distinti W_1, W_2 di $M_2(\mathbb{R})$ tali che:

$$M_2(\mathbb{R}) = W \oplus W_1 = W \oplus W_2.$$

Esercizio 8. Dimostrare che gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2,1),(-1,-1)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(-1,-3),(2,3)\}$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$. Determinare le coordinate dei vettori $(1,3)$, (2,-1) rispetto a tali basi. Quali sono le coordinate del vettore $(0,1)_{\mathcal{B}_1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$?

Esercizio 9. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalari ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non alla somma.

Esercizio 10. Si considerino i vettori $v_1 = (t, 2t, -1)$, $v_2 = (-2,-4,t-1)$, $v_3 = (1,-2,1)$ di $\mathbb{R}^3$, al variare del parametro reale t. Determinare, se esistono, i valori del parametro t per i quali v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Soluzioni.

Esercizio 1. $S \cap T = \langle(1,0,-1,0)\rangle$; $S + T = \langle(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle$.

Esercizio 2. U, R, T sono sottospazi di V.

Esercizio 3. *a)* $\{(1,3,0,0),(1,6,-3,-1)\}$; *b)* $\{(1,1,1),(3,6,0)\}$.

Esercizio 4. $\{(1,1,0,1),(1,1,0,0),(1,0,1,1),(1,7,3,2)\}$.

Esercizio 5. *a*) $W_1 \cap W_2 = W_1$, $W_1 + W_2 = W_2$; *b*) $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$; *c*) $W_1 \cap W_2 = \langle (1,0,-1) \rangle$, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Ad esempio i sottospazi W_1 e W_2 di cui al punto *c*) dell'Esercizio 5.

Esercizio 7. *b*) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. *c*) $W_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$, $W_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Esercizio 8. $(1,3) = (-2,-5)_{\mathcal{B}_1} = (-1,0)_{\mathcal{B}_2}$; $(2,-1) = (3,4)_{\mathcal{B}_1} = (8/3,7/3)_{\mathcal{B}_2}$; $(0,1)_{\mathcal{B}_1} = (-1/3,-2/3)_{\mathcal{B}_2}$.

Esercizio 10. $t = 2, -1$.