Foglio di esercizi numero 1bis

Geometria 1A

Esercizio 1. Sia $S = \{(x,y)^T \in \mathbb{K}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 0\}$. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^2$ nei seguenti casi:

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;

c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Sia $u \in Span\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$. Dimostrare che $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + u, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$ di grado minore o uguale a 5. Sia W il sottospazio vettoriale di V costituito dai polinomi $p(x)$ tali che $p(x) = p(-x)$. Calcolare la dimensione di W. Trovare due sottospazi distinti T_1, T_2 di V tali che $W \oplus T_1 = V = W \oplus T_2$.

Esercizio 4. Stabilire se esistono campi $\mathbb{K}$ tali che l'applicazione

$$C : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$$

$$p \mapsto p^2$$

sia lineare.

Esercizio 5. Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ definiti da $v_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$, $v_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$, $v_3 = (0, 0, 1)^T$. Stabilire sotto quali condizioni $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Sia $c \in \mathbb{K}$ e sia $g : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ lapplicazione definita da $g(p) = p(c)$. Mostrare che g è lineare e calcolarne il nucleo.

Esercizio 7. Esibire 4 vettori $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{Q}^4$ con queste proprietà:

(1) Eliminando un qualsiasi vettore, i tre rimanenti sono sempre indipendenti.

(2) I sottospazi $U = Span(v_1, v_2)$ e $W = Span(v_3, v_4)$ non sono in somma diretta.

Esercizio 8. Siano U, V, W sottospazi di $\mathbb{Q}^4$, tutti di dimensione 3. Siano $a = \dim(U \cap V)$, $b = \dim(V \cap W)$, $c = dim(U \cap W)$, $d = \dim(U \cap V \cap W)$.

(1) Dimostrare che $a \in \{2, 3\}$.

(2) Dimostrare che $d > 0$.

(3) Costruire un esempio di U, V, W in cui $d = 2$.

(4) Costruire un esempio di U, V, W in cui $d = 1$.

(5) Determinare tutti i possibili valori per la quadrupla (a, b, c, d) al variare di U, V, W.

Esercizio 9. Siano $\mathcal{S}$ il sottospazio delle matrici simmetriche di $M_n(\mathbb{Q})$ e $\mathcal{A}$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche. Calcolare la proiezione su $\mathcal{S}$ di una qualsiasi matrice $X \in M_n(\mathbb{Q})$, rispetto alla decomposizione $M_n(\mathbb{Q}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.