

Foglio di esercizi numero 2
Geometria 1A

Esercizio 1. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^4 definito nel modo seguente:

$$f(x, y, z, w) = (w, x + y, x + z, w).$$

Determinare un sottospazio T di \mathbb{R}^4 tale che $\mathbb{R}^4 = T \oplus \ker f$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da: $f(x, y, z, w) = (x + z, 3z - w, y)$. Verificare che f è lineare e determinare $\ker f$, $\text{Im} f$ e le loro dimensioni.

Esercizio 3. Esiste una applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(0, 1) = (2, 4)$, $\varphi(1, 1) = (1, 5)$? È unica? In caso di risposta affermativa determinare nucleo e immagine di φ .

Esercizio 4. Verificare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z, w) = (x + w, w - z, 2x + 2z)$$

è lineare. Determinare $\ker f$, $\text{Im} f$ ed una base di ciascuno di tali sottospazi. Sia poi S il sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dai vettori $v_1 = (0, 1, -2)$ e $v_2 = (1, 0, 2)$; determinare $f^{-1}(S)$.

Esercizio 5. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -4 \\ 15 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice A . Determinare $f^{-1}(1, 1)$.

Esercizio 6. Siano V e V' due spazi vettoriali, di dimensione rispettivamente due e tre, e siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di V' . Sia poi $f : V \rightarrow V'$ l'applicazione lineare tale che $f(v_1) = u_1 - 2u_2 + u_3$, $f(v_2) = u_3 - 2u_1$. Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' e determinare le componenti rispetto a \mathcal{B}' del vettore $f(v)$ dove $v = -\frac{1}{2}v_1 + v_2$.

Esercizio 7. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare $\ker f$, $\text{Im} f$ e le loro dimensioni, esibendo una base di tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Si consideri la seguente funzione f_s di \mathbb{R}^3 in se stesso:

$$f_s(x, y, z) = (x + y + z, x - y + s, sx + (s - 1)z).$$

1. Per quali valori di s l'applicazione f_s è lineare?

2. Per i valori di s trovati al punto 1.:

- a) Determinare $\ker f_s$, $\text{Im} f_s$.
- b) Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im} L = \text{Im} f_s$? In caso affermativo costruire L .
- c) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker T = \text{Im} f_s$? In caso affermativo costruire T .

d) Determinare la controimmagine mediante f_s del vettore $(-1, 1, 1)$.

Esercizio 9. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 :

$$U_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0, \quad x - y = 0\}, \quad U_2 = \text{Span}\{(-1, 1, 1)\}.$$

1. Determinare $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ e stabilire se la somma di U_1 ed U_2 è diretta.
2. Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che abbia U_1 come nucleo ed U_2 come immagine? In caso affermativo costruire L .
3. Esiste una applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che abbia U_2 come immagine? In caso affermativo costruire T .
4. Esiste una applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che abbia U_1 come nucleo? In caso affermativo costruire f .

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x, y) = (x + 3y, y, x + 3y)$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .
2. Determinare $\ker f$ e $\text{Im} f$.
3. Determinare $f^{-1}(1, 1, -1)$.

Esercizio 11. Si considerino, al variare del parametro reale k , le seguenti applicazioni lineari:

$$f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_k(x, y, z) = (kx + y - z, ky + (k + 1)z, (k - 1)z).$$

1. Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .
2. Determinare per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.
3. Determinare per quali valori di k il vettore $(1, 0, 0)$ appartiene a $\text{Im} f_k$.
4. Sia $k = 1$. Determinare un sottospazio vettoriale S di \mathbb{R}^3 tale che $S \oplus \ker f_1 = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 12. 1) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $f(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

2) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $g(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $g(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $g(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

3) Esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $h(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $h(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $h(0, 0, 1) = (1/2, -1/2, 1/2)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

Esercizio 13. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che: $\ker L = \text{Span}\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ e $\text{Im} L = \text{Span}\{(1, 1)\}$.

Esercizio 14. Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(x, y) = (x + y, x - y, y).$$

1. Si determini $\text{Ker} T$: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è iniettiva?

2. Si determini ImT : se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è suriettiva?
3. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $S \neq T$, $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $KerS = KerT$ e $ImS = ImT$.

Esercizio 15. Si considerino gli spazi vettoriali \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 . Siano dati i vettori $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 2)$ ed i vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, 0, 1, 2)$.

1. Esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $L(u_1) = v_1 - v_3$, $L(u_2) = v_2 + v_4$ e $L(u_3) = v_2 - v_4$? È unica? In caso affermativo determinare $L(1, 0, 0)$.
2. Esiste un'applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ell(u_1) = v_1 - v_3$, $\ell(u_2) = v_2 + v_4$ e $\ker(\ell) = \langle (0, 4, 3) \rangle$?

Esercizio 16. Sia $T : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ l'applicazione definita da:

$$T(p(x)) = xp'(x)$$

dove $p'(x)$ indica la derivata prima del polinomio $p(x)$.

1. Mostrare che T è lineare.
2. Determinare nucleo e immagine di T .
3. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.
4. Determinare i polinomi p tali che $T(p) = p$.

Esercizio 17. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare $\ker f$, Imf e le loro dimensioni, fornendo una base di tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 18. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare così definita:

$$f(a, b, c) = (3a + c, -2a + b, -a + 2b + 4c).$$

Si richiede di:

1. dimostrare che f è un isomorfismo;
2. determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica;
3. dimostrare che i vettori $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (0, 2, 0)$ sono una base di \mathbb{R}^3 e determinare la matrice A associata ad f rispetto a tale base.

Esercizio 19. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $V = V_1 \oplus V_2$. Sia

$$p_{V_1}^{V_2} : V \rightarrow V$$

l'applicazione che ad ogni vettore v di V associa la sua componente lungo V_1 : se $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, $p_{V_1}^{V_2}(v) = v_1$.

1. Mostrare che $p_{V_1}^{V_2}$ è un'applicazione lineare.
2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $V_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$. Determinare due sottospazi distinti V_2, V_3 di \mathbb{R}^3 tali che $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ e $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_3$. Calcolare $p_{V_1}^{V_2}(1, 0, 2)$ e $p_{V_1}^{V_3}(1, 0, 2)$. I vettori trovati coincidono?

Esercizio 20. In \mathbb{R}^3 siano dati i vettori $v_1 = (2, t, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, t)$ dove t è un parametro reale. Si consideri l'endomorfismo f di \mathbb{R}^3 definito da:

$$f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2, \quad f(e_3) = v_3$$

essendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3 .

1. Esistono valori del parametro t per i quali l'applicazione f è invertibile?
2. Si ponga $t = -1 + \sqrt{3}$.
 - a) Si determinino una base di $\ker f$ ed una base di $\text{Im} f$.
 - b) Si scriva una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im} g = \ker f$ e si determini $f \circ g$.
 - c) Si scriva una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im} h = \text{Im} f$ e si determini $f \circ h$.

Soluzioni.

Esercizio 1. Si ha $\ker f = \text{Span}\{(1, -1, -1, 0)\}$ dunque T ha dimensione 3. Per esempio $T = \text{Span}\{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ soddisfa le condizioni richieste.

Esercizio 2. $\ker f = \text{Span}\{(-1, 0, 1, 3)\}$, $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$, dunque $\dim(\ker f) = 1$ e $\dim(\text{Im} f) = 3$.

Esercizio 3. Esiste una ed una sola applicazione lineare φ soddisfacente le condizioni richieste. Si ha: $\text{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$, $\ker \varphi = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Esercizio 4. $\ker f = \text{Span}\{(1, 0, -1, -1), (0, 1, 0, 0)\}$, $\text{Im} f = \text{Span}\{(1, 0, 2), (1, 1, 0)\}$. Si ha: $S = \text{Im} f$, dunque $f^{-1}(S) = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. $\ker f = \text{Span}\{(-\frac{1}{5}, 2, 5)\}$, $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$. $f^{-1}(1, 1) = (-\frac{3}{25}, \frac{1}{5}, 0) + \text{Span}\{(-\frac{1}{5}, 2, 5)\}$.

Esercizio 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $f(v) = (-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}'}$.

Esercizio 7. Se $\alpha = 0$, $\text{Im} f = \text{span}\{(1, 0, 1)\}$, $\ker f = \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$; se $\alpha \neq 0$, $\text{Im} f = \text{span}\{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$, $\ker f = \text{span}\{(1, 0, -1)\}$.

Esercizio 8. f_s è lineare se e solo se $s = 0$; $\text{Im} f_0 = \mathbb{R}^3$, $\ker f_0 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; non esiste una funzione L come richiesta; $T = 0$; $f_0^{-1}(-1, 1, 1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$.

Esercizio 9. $U_1 + U_2 = \langle (1, 1, 3), (-1, 1, 1) \rangle$, $U_1 \cap U_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, dunque la somma di U_1 e U_2 è diretta. Non esistono delle funzioni L e T come richieste. Una funzione f come richiesta è, ad esempio, $f(x, y, z) = (x - \frac{1}{3}z, y - \frac{1}{3}z)$.

Esercizio 10. La matrice di f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$,

$\text{Im} f = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$; $f^{-1}(1, 1, -1) = \emptyset$.

Esercizio 11. La matrice di f_k rispetto alle basi canoniche è: $\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & k+1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$; f_k è iniettiva per $k \neq 0, 1$; $(1, 0, 0) \in \text{Im} f_k$ per ogni k ; ad esempio $S = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

Esercizio 12. f esiste ed è unica; g come richiesta non esiste; esistono infinite funzioni h come richieste.

Esercizio 13. Una L come richiesta è, ad esempio, $L(x, y, z) = (-x + y + z, -x + y + z)$.

Esercizio 14. $\ker T = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, dunque T è iniettiva. T non è suriettiva, $\text{Im}T = \text{span}\{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$; una applicazione S come richiesta è, ad esempio, $S(x, y) = (x - y, x + y, -y)$.

Esercizio 15. Esiste un'unica L come richiesta e vale $L(1, 0, 0) = (-1, -1, -\frac{7}{9}, -\frac{8}{3})$; non esiste ℓ come richiesta.

Esercizio 16. $\text{Im}T = \text{span}\{x, x^2, x^3\}$; $\ker T = \text{span}\{1\}$; la matrice richiesta è:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

l'insieme dei polinomi fissati dall'applicazione T è $\langle x \rangle$.

Esercizio 17. Per $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}$, $\text{Im}f = \mathbb{R}^3$, $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; per $\alpha = 0$: $\text{Im}f = \text{span}\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$, $\ker f = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$; per $\alpha = \frac{1}{2}$: $\text{Im}f = \text{span}\{(1, 1, 2), (0, 1, 0)\}$, $\ker f = \text{span}\{(-\frac{1}{2}, 1, 1)\}$.

Esercizio 18. La matrice di f rispetto alla base canonica è:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
. Tale matrice

ha rango massimo dunque f è un isomorfismo; la matrice di f rispetto alla base $\{u, v, w\}$ è:

$$\begin{pmatrix} 7/2 & 3/2 & 2 \\ -1/2 & 7/2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 19. Possiamo scegliere, ad esempio, $V_2 = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$ e $V_3 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$. Allora $p_{V_1}^{V_2}(1, 0, 2) = (1, 0, 1)$ e $p_{V_1}^{V_3}(1, 0, 2) = (2, 0, 2)$.