

**Foglio di esercizi numero 3**  
Geometria 1A

**Esercizio 1.** Determinare per quali valori del parametro reale  $k$  il seguente sistema nelle variabili  $x, y, z$  ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x - ky + z = 1 \\ x + ky - z = 0 \\ 3x - y + z = 2. \end{cases}$$

[Soluzione:  $k = 1$ .]

**Esercizio 2.** Discutere, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} z + ky = 2 \\ x + y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

nelle variabili  $x, y, z$ .

[Soluzione: se  $k \neq -1$  una sola soluzione  $(-\frac{k+2}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1})$ ; se  $k = -1$  nessuna soluzione.]

**Esercizio 3.** Discutere, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , la risolubilità del seguente sistema omogeneo nelle variabili  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x + (k - 2)y + z = 0 \\ -kx + y - z = 0 \\ x - y + kz = 0 \end{cases}$$

[Soluzione: se  $k \neq 0$  e  $k \neq 1$  soluzione nulla; se  $k = 0$  l'insieme delle soluzioni è  $\text{span}\{(1, 1, 1)\}$ ; se  $k = 1$  l'insieme delle soluzioni è  $\text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ .]

**Esercizio 4.** Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare nelle variabili  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$$

[Soluzione:  $\text{span}\{(-1, 5, 3)\} + (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$ .]

**Esercizio 5.** Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare nelle incognite  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

**Esercizio 6.** Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

**Esercizio 7.** Discutere la risolubilità dei seguenti sistemi lineari nelle variabili  $x, y, z$ , al variare del parametro in  $\mathbb{R}$ :

$$(i) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ hx - hy + z = 0 \\ h^2x + h^2y + z = 0. \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y - z = k - 2 \\ x + ky + z = k + 2. \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x + hz = -h \\ -x + y + z = h \\ x + hy + hz = 1. \end{cases}$$

Soluzioni: (i) Per  $h = \pm 1$  il sistema non ha soluzioni; per  $h = 0$  l'insieme delle soluzioni è  $S = \text{span}\{(-1, 1, 0)\} + (1, 0, 0)$ ; per  $h \neq \pm 1, 0$  il sistema ha l'unica soluzione  $(\frac{1}{2(1-h)}, \frac{1}{2(h+1)}, \frac{h^2}{h^2-1})$ . (ii) Se  $k = 0$  l'insieme delle soluzioni è  $T = \text{span}\{(1, 1, -1)\} + (2, 2, 0)$ ; se  $k \neq 0$  il sistema ha l'unica soluzione  $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}k, \frac{1}{2}, \frac{6-k}{4})$ . (iii) Se  $h = 0$  il sistema non ha soluzioni; se  $h = -1$  l'insieme delle soluzioni è  $R = \text{span}\{(1, 0, 1)\} + (1, 0, 0)$ ; se  $h \neq 0, -1$  il sistema ha l'unica soluzione  $(1 - h, \frac{1+h}{h}, -\frac{1}{h})$ .

**Esercizio 8.** Al variare di  $t \in \mathbb{R}$  si determinino le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x + ty + z = 1 \\ tx + y + z = t^2 \\ x + y + tz = t. \end{cases}$$

**Esercizio 9.** Sia  $S$  l'insieme delle soluzioni del seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

1. Determinare  $S$ .
2. Esiste una terna  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tale che  $(a, b, c) + S$  sia un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ ? In caso affermativo determinarla.

**Esercizio 10.** Sia dato il sistema nelle variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \\ ax_1 + ax_2 - 2x_4 = 0 \\ ax_1 + (a - 1)x_4 = a. \end{cases}$$

Si discuta il sistema al variare di  $a \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 11.** Sia  $S_t$ , al variare del parametro reale  $t$ , l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} 6x + ty + 6z = 0 \\ tx - ty = 0 \\ tx + 2z = 0. \end{cases}$$

1. Determinare  $S_t$ .  $S_t$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ ?
2. Sia  $T_s = \text{span}\{(1, 1, s), (0, 0, 1)\}$ . Stabilire se esistono valori dei parametri reali  $t$  ed  $s$  tali che  $S_t \subset T_s$ .