Foglio di esercizi numero 4
Corso di Geometria 1a
Corso di Laurea in Matematica

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo scrivere la forma diagonale di A ed una matrice diagonalizzante.

Esercizio 2. Stabilire se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono simili.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(a, b, c) = (0, a + 3b - 2c, 2a + 6b - 4c).$$

1. Calcolare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Determinare gli autovalori di A e dire se A è diagonalizzabile; in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante.

Esercizio 4. Calcolare, se possibile, i valori del parametro reale t per i quali la seguente matrice A_t ammette due autovalori negativi ed uno positivo:

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \\ 0 & t-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Stabilire se l'applicazione $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 12 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, ed in caso affermativo determinarne l'inversa.

Esercizio 6. Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e l'operatore di derivazione $D : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima. Determinare gli autovalori di D e calcolare i relativi autospazi. Stabilire se D è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovarne la forma diagonale.

Esercizio 7. Considerato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si verifichi se esso è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica cioè tale che $A = A^t$. Dimostrare che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 9. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^8 \to M_3(\mathbb{R})$ tale che $Im(f)$ contenga l'insieme $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid rk(A) = 2\}$.

Esercizio 10. Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base da una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{C} = \{(1,2,2),(0,1,-1),(1,2,1)\}$. Determinare i vettori di $\mathcal{B}$.

Esercizio 11. Sia φ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n. Supponiamo che φ abbia n autovalori distinti. Dimostrare che esiste un vettore $v \in V$ tale che l'insieme $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{n-1}(v)\}$ sia una base di V.

Esercizio 12. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $U \subset V$ un sottospazio di V tale che $f(U) \subset U$. Mostrare che il polinomio caratteristico della restrizione $f_{|U}$ di f ad U divide il polinomio caratteristico di f. In particolare se f ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ anche $f_{|U}$ li ha.