Foglio di esercizi numero 5
Corso di Geometria 1a
Corso di Laurea in Matematica

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $W \subseteq V$ un sottospazio di dimensione $m < n$. Dimostrare che W si può scrivere come intersezione di $n - m$ sottospazi vettoriali di dimensione $n - 1$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^{350} \to \mathbb{R}^{250}$ un'applicazione lineare e sia $V \subset \mathbb{R}^{350}$ un sottospazio vettoriale tale che: $\dim V = 300$, $\dim(V \cap \ker(f)) = 50$. Calcolare le dimensioni di $f(V)$ e di $V + \ker f$. Dire se f è suriettiva.

Esercizio 3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la traccia di ABA (riflettere sulle proprietà della traccia prima di mettersi a fare i conti). Cosa si può dire della traccia di $AB^{350}A$?

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero (cioè tale che $n \cdot 1 \neq 0$ per ogni intero positivo n). Dimostrare che una matrice quadrata a coefficienti in $\mathbb{K}$ ha traccia nulla se e solo se la si può scrivere come combinazione lineare di matrici del tipo $AB - BA$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che $V^* = ann(U) \oplus ann(W)$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$. Sia $s : V \to V$ definita come segue: dato $v \in V$ della forma $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$, $s(u + w) = u - w$.

1. Mostrare che s è lineare;
2. mostrare che s è iniettiva;
3. mostrare che s è suriettiva;
4. stabilire se s è diagonalizzabile.

Esercizio 7.

1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ con $v_1' = v_1 + v_2$, $v_2' = -v_2$, $v_3' = -v_1 - v_2 + v_3$. Scrivere la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

2. Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$. Sia $\mathcal{C}' = \{w'_1, w'_2\}$ con $w'_1 = w_1 + w_2$, $w'_2 = 2w_1 + w_2$. Scrivere la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$.

3. Sia $L : V \to W$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scrivere:

a) la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}'$;

b) la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}$;

c) la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$.

Esercizio 8. Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) su $\mathbb{R}$;

b) su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Siano U e V i seguenti sottospazi di $\mathbb{K}^3$:

$$U = span\{(1,1,1)^T, (0,1,1)^T\}, \qquad V = span\{(0,0,1)^T\}.$$

Stabilire se esiste una matrice quadrata A di ordine 3 avente U e V come autospazi relativi, rispettivamente agli autovalori 1 e 0. In caso affermativo costruire A.

Esercizio 10. Siano $\mathcal{A} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T = X\}$ e $\mathcal{S} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$. Sia poi $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(X) = X^T - X.$$

a) Determinare nucleo e immagine di L;

b) mostrare che $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$;

c) mostrare che L è diagonalizzabile.

Esercizio 11. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare gli autovalori (reali) di A e determinare una base dei relativi autospazi.

b) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.

c) Stabilire se A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$