Foglio di esercizi numero 6

Corso di Geometria 1a

Corso di Laurea in Matematica

Esercizio 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ elementi distinti. Dimostrare che l'applicazione

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1}$$

$$p \mapsto (p(\alpha_0), \dots, p(\alpha_n))$$

è un isomorfismo.

Esercizio 2. Sia

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia L_C l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato a C rispetto alla base canonica. Stabilire se L_C è diagonalizzabile. Calcolare $L_{C^n}((1, -1))$ per ogni numero naturale n.

Esercizio 3. Sia

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia L_D l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato a D rispetto alla base canonica. Sia $V = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

1) Mostrare che $L_D(V) \subseteq V$;

2) Verificare che $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ è una base di V. Calcolare la matrice della restrizione $L_{D|V} : V \to V$ di L_D a V rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 4. Sia $f \in End(V)$. Mostrare che si ha $Im(f \circ f) = Imf$ se e solo se $\ker(f \circ f) = \ker f$.

Esercizio 5. Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo tale che $f^k = id_V$. Mostrare che f è un isomorfismo e calcolarne l'inverso.

Esercizio 6. Scrivere due matrici in $M_3(\mathbb{R})$ che pur avendo lo stesso polinomio caratteristico non sono simili.

Esercizio 7. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $T_a : \mathbb{R}_{\leq 3}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$ l'endomorfismo definito da: $T_a(p(t)) = (t+a)p'(t-a)$, essendo $p'(t-a)$ la derivata prima di t valutata in $t-a$. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'endorfismo T_a è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Stabilire se tra le seguenti matrici ci sono coppie di matrici simili. Per ogni coppia di matrici simili A e B, determinare H invertibile tale che $H^{-1}AH = B$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5. Sia W il sottospazio vettoriale di V costituito dai polinomi $p(x)$ tali che $p(x) = p(-x)$. Calcolare la dimensione di W. Trovare un sottospazio T di V tale che $W \oplus T = V$.

Esercizio 10. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Mostrare che:

1) $\ker(f) \subseteq \ker(f^2)$;

2) $f(\ker(f^2)) \subseteq \ker(f)$.

Considerare poi la restrizione di f al nucleo di f^2 e mostrare che

3) $\dim \ker(f^2) \leq 2 \dim \ker(f)$.

Esercizio 11. Sia $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lapplicazione lineare definita da

$$P(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

con $0 \leq k \leq n-1$. Dimostrare che $P^2 = P$. Trovare una matrice A tale che $P(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{K}^n$.

Esercizio 12 . Vero o falso? Sia $W \subset \mathbb{K}^5$ un sottospazio di dimensione 2. Allora possiamo scrivere W come intersezione di due sottospazi di dimensione 4.