Foglio di esercizi numero 7
Corso di Geometria 1a
Corso di Laurea in Matematica

Esercizio 1. Sia T un endomorfismo invertibile. Mostrare che T è diagonalizzabile se e solo se T^{-1} è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia V lo spazio delle matrici reali simmetriche di ordine 2 e sia $F : V \to V$ l'applicazione lineare definita come $F(M) = A^T MA$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori di F, le loro molteplicità algebriche e geometriche e i relativi autospazi. Dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Siano $f, g : V \to W$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita. Dimostrare che $Im(f+g) \subseteq Im(f) + Im(g)$ e dedurre la disuguaglianza $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$. Trovare un esempio in cui $rg(f+g) = 2$ e $rg(f) = rg(g) = 1$.

Esercizio 4. Date due applicazioni lineari $f : U \to V$ e $g : V \to W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, dimostrare che $rg(g \circ f) \geq rg(f) + rg(g) - dim(V)$.

Esercizio 5. Consideriamo i seguenti polinomi a coefficienti reali nella variabile t:

$$p_1 = 1 + t, \quad p_2 = 1 + 2t + t^2, \quad p_3 = t - t^2, \quad r_1 = 1 - t, \quad r_2 = 2 + t.$$

a) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ e che $\mathcal{C} = \{r_1, r_2\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 1}[t]$.

b) Calcolare le coordinate di $q_1 = 2 - t + t^2$ e di $q_2 = 3 + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

c) Sia $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$ l'applicazione lineare

$$D(p) := \frac{dp}{dt}.$$

Calcolare la matrice M associata a D rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

d) Verificare che l'applicazione $\theta_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}^3$ che calcola le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ manda vettori appartenenti a $\ker(D)$ in vettori appartenenti al nucleo della matrice M e che in effetti $\theta_{\mathcal{B}}$ determina un isomorfismo tra questi due nuclei.

Esercizio 6. Determinare una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

e calcolare A^k per ogni intero $k \geq 1$.

Esercizio 7.

a) Si costruisca un endomorfismo f di $\mathbb{K}^3$ tale che: $Im(f) = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{K}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ e $\ker(f) = Span\{(1,1,1)^T\}$.

b) Esiste un unico endomorfismo soddisfacente le condizioni del punto a)?

c) Stabilire se esistono una base $\mathcal{B}$ ed una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{K}^3$ rispetto alle quali la matrice associata ad f sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Stabilire se esiste una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{K}^3$ rispetto alla quale la matrice associata ad f sia M.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$. Sia $W = End(V)$ lo spazio vettoriale delle aapplicazioni lineari da V in V e sia $U = End(W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da W in W. Se $A \in W$, si considerino le applicazioni lineari $T_A, S_A : W \to W$ definite da $T_A(X) = AX$ e $S_A(X) = AX - XA$. Si osservi che T_A, S_A sono elementi di U e si considerino le due applicazioni lineari $T, S : W \to U$ definite da: $T(A) = T_A$ e $S(A) = S_A$.

a) Si calcoli la dimensione di W e di U;

b) si determini il rango di S e T.

Esercizio 9. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{K}^3$ costituita dai vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare la base $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ di $(\mathbb{K}^3)^*$, duale di $\mathcal{B}$ (scrivendo la matrice di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^3$ e alla base $\{1\}$ di $\mathbb{K}$).

Esercizio 10. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Mostrare che l'applicazione $f^* : W^* \to V^*$ definita da:

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

è lineare. Mostrare, inoltre, che se $g : W \to U$ è un'altra applicazione lineare, si ha:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : U^* \to V^*.$$

Alcune domande di base. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false spiegando brevemente perché:

1. Due spazi vettoriali U e V tali che $\dim(U) = \dim(V) = n$ sono isomorfi.

2. Due sottospazi vettoriali distinti di $\mathbb{K}^n$ di dimensione 1 sono in somma diretta.

3. Se $f : U \to U$ è un'applicazione lineare tale che $\ker(f) = 0$ allora f è suriettiva.

4. Siano f, g due endomorfismi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V tali che $f \circ g = 0$. Allora $f = 0$ oppure $g = 0$.

5. I vettori di $\mathbb{K}^3$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sono linearmente indipendenti qualsiasi sia il campo $\mathbb{K}$.

6. L'applicazione $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definita da $f(x) = x^3$ è lineare se il campo $\mathbb{K}$ ha caratteristica 3.

7. Se due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.

8. Se f è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V tale che $f^2 = 0$ allora $f = 0$.

9. Se f è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V tale che $f^2 = id$ allora f è invertibile.

10. Se tre vettori generano $\mathbb{K}^3$ allora sono linearmente indipendenti.