Esercizio Siano

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostrare che AB e BA hanno lo stesso polinomio caratteristico.

È vero che AB e BA sono simili?

Svolgimento.

In generale AB e BA **NON** sono simili.

Controesempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che se A (o B) è invertibile allora

$$BA = \underbrace{A^{-1}(A}_{= I_n} B)A$$

cioè BA e AB sono simili (e quindi hanno lo stesso polinomio caratteristico).

Supponiamo A, B <u>non</u> invertibili. Sia $rg(A) = k$. Allora <u>sappiamo</u>

$$A = H \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L$$

con $H, L \in M_n(\mathbb{K})$ invertibili.

Allora possiamo scrivere

$$B = \underbrace{L^{-1} L}_{= I_n} B \underbrace{H H^{-1}}_{= I_n} = L^{-1} C H^{-1} = L^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} H^{-1}$$

con $C_{11} \in M_k(\mathbb{K})$, $C_{12} \in M_{k,n-k}(\mathbb{K})$

$C_{21} \in M_{n-k,k}(\mathbb{K})$, $C_{22} \in M_{n-k}(\mathbb{K})$

$$A = H \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L$$

$$AB = H \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} H^{-1} = H \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H^{-1} \Longrightarrow$$

il polinomio caratteristico di AB è il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (perché le due matrici sono simili) $\Rightarrow$

$$p_{AB}(t) = \det \begin{pmatrix} C_{11} - tI_k & 0 \\ 0 & -tI_{n-k} \end{pmatrix} = p_{C_{11}}(t)\,(-1)^{n-k}\, t^{n-k}$$

$$BA = L^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L = L^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} L$$

$$\Rightarrow p_{BA}(t) = \boxed{p_{C_{11}}(t)\,(-1)^{n-k}\, t^{n-k}}$$