Esercizio Sia V un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale di dimensione n.

1) Sia $f \in End(V)$ diagonalizzabile e sia $U \subseteq V$ un sottospazio f-invariante. Allora $f|_U : U \to U$ è diagonalizzabile.

2) Siano $f, g \in End(V)$ diagonalizzabili t.c. $f \circ g = g \circ f$. Allora f e g sono simultaneamente diagonalizzabili (cioè $\exists$ base di V costituita da autovettori comuni a f e g)

Nota: in generale due endomorfismi diagonalizzabili si guardano bene dall'essere simultaneamente diagonalizzabili. Ad esempio:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(in $\mathbb{Q}$, ad esempio)

$\hookrightarrow$ ha polin. caratteristico t^2-1 e quindi radici ± 1.

$$FG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq GF = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Base di autovettori di F è $\left\{ \underset{\in V_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\in V_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \alpha \neq 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ non è mai autovettore di G !

Svolgimento.

1) f è diagonalizzabile e $f(U) \subseteq U$ $\Rightarrow$

$f|_U : U \to U$. Devo mostrare che U si spezza nella somma diretta di autospazi di $f|_U$.

Poiché f è diagonalizzabile

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$
$$\cup\!\!\mid$$
$\forall\ u \in U$, $u = v_1 + \dots + v_k$, $v_i \in V_{\lambda_i}$

Basterà mostrare che $v_i \in \underbrace{V_{\lambda_i} \cap U}$. Procediamo

per induzione su k. Se $k=1$ non c'è nulla da

mostrare perché $u = v_1 \in U \cap V_{\lambda_1}$.

Assumiamo l'ipotesi vera per $k-1$ addendi

cioè se un elemento di U si scrive

come somma di $k-1$ autovettori

ciascuno di questi sta in U (ipotesi induttiva).

$$u = v_1 + \dots + v_k$$

$$U \ni f(u) = f(v_1) + \dots + f(v_k) =$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

$$\underbrace{f(u) - \lambda_1 u}_{\in U} = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1) v_2}_{\in V_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{(\lambda_k - \lambda_1) v_k}_{\in V_{\lambda_k}}$$

Per ipotesi induttiva $v_2, \dots, v_k \in U$ $\quad u \in U$

$$\Rightarrow v_1 = u - v_2 - \dots - v_k \in U. \Rightarrow$$

$v_i \in U \quad \forall i = 1, \dots, k$.

2) $f, g \in End(V)$, $f \circ g = g \circ f$

diagonalizzabili

Mostriamo che esiste una base di V costituita da autovettori comuni a f e g.

Consideriamo innanzitutto f. Poiché f è diagonalizzabile

$$V = \underbrace{V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}}_{\text{autospazi di } f}$$

Notiamo che $g(V_{\lambda_i}) \subseteq V_{\lambda_i}$. Infatti sia

$$\boxed{v \in V_{\lambda_i}}$$

$$\Rightarrow \quad f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{g(v) \in V_{\lambda_i}}$$

Per la parte 1) dell'esercizio, essendo g diagonalizzabile, $g|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \longrightarrow V_{\lambda_i}$

è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di V_{λ_i} costituita da autovettori di g. Ma ognuno di questi vettori è un autovettore anche per f (perché è un elemento di V_{λ_i}).

Considerando una base siffatta in ogni autospazio V_{λ_i} costruisco una base di V costituita da autovettori comuni a f e g.