Esercizio

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, con $n \geq 1$.

Mostrare che esiste un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^n$ invariante per f e tale che $0 < \dim W \leq 2$.

Svolgimento

Supponiamo che f abbia un autovalore reale λ.

Allora $\exists \; v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{v}}$$

Basta prendere $W = \operatorname{Span}\{v\}$. Allora $\dim W = 1$, W f-invariante.

Supponiamo ora che f non abbia autovalori reali.

Per fissare le idee possiamo fissare la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e considerare la matrice F associata ad f rispetto ad essa. Allora $F \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$. Il polinomio caratteristico di F è un polinomio di grado n a coefficienti reali e come tale ha esattamente n radici complesse. Sia r una tra queste radici.

Allora $\exists\ z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$, t.c.

$$\boxed{f(z) = \sigma z} \quad \longleftrightarrow \quad F\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underset{\mathbb{C}}{\sigma} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\overline{F} = F$$

$$\mathbb{C} \ni z_k = x_k + i y_k$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{} + i \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{}$$

$$\mathbb{R}^n \ni x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}^n$$

$$\overline{f(z)} = \overline{\sigma z} = \overline{\sigma}\, \overline{z}$$

$$\overset{\parallel}{f(\overline{z})}$$

$\iff$ $\overline{z}$ è autovettore di f

relativo a $\bar{\sigma}$

Riepilogo

$$\boxed{\begin{aligned} f(z) &= \sigma z \\ f(\bar{z}) &= \bar{\sigma}\,\bar{z} \end{aligned}}$$

con $z, \bar{z} \in \mathbb{C}^n$, $\sigma \in \mathbb{C}$

$$\Downarrow$$

$$f(\underbrace{z+\bar{z}}_{=\,2\,\mathrm{Re}\,z}) = \underbrace{\sigma z + \bar{\sigma}\bar{z}}_{=\,2\,\mathrm{Re}\,\sigma z} \iff f(\underbrace{\mathrm{Re}\,z}_{\mathbb{R}^n}) = \underbrace{\mathrm{Re}(\sigma z)}_{\mathbb{R}^n}$$

$$f(\underbrace{i(z-\bar{z})}_{=}) = i(\sigma z - \bar{\sigma}\bar{z}) \iff f(\mathrm{Im}\,z) = \mathrm{Im}(\sigma z)$$

$-2\,\mathrm{Im}\,z$

Definisco $W = \mathrm{Span}\{\underbrace{\overset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Re}\,z}}_{=\,x}, \underbrace{\overset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Im}\,z}}_{=\,y}\}$ e verifico che

$\mathrm{Re}(\sigma z), \mathrm{Im}(\sigma z) \in W$.

Scriviamo $\quad z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$

$\qquad\qquad\quad \sigma = \sigma_0 + i\sigma_1 \qquad \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}$

e calcoliamo

$$\sigma z = \underbrace{\sigma_0 x - \sigma_1 y}_{=\ \mathrm{Re}\,\sigma z\ \in\ W} + i\,(\underbrace{\sigma_1 x + \sigma_0 y}_{=\ \mathrm{Im}\,\sigma z\ \in\ W})$$

$\square$.