Esercizio

Siano $f, g \in End(V)$, $\dim V = n$. Supponiamo che f, g siano triangolabili (o, equivalentemente, che abbiano tutti gli autovalori nel campo) e che $\boxed{f \circ g = g \circ f}$. Allora f e g sono simultaneamente triangolabili (cioè esiste una base di V rispetto alla quale sia la matrice di f che quella di g sono triangolari superiori).

Svolgimento.

Osserviamo che se V_λ^f è autospazio di f

relativo all'autovalore λ allora V_λ^f è

g-invariante. Infatti, sia $w \in V_\lambda^f$ e

consideriamo $f(g(w)) = g(\underbrace{f(w)}_{= \lambda w}) = \lambda g(w)$

$$\Rightarrow g(w) \in V_\lambda^f$$

$$\Rightarrow g\big|_{V_\lambda^f} : V_\lambda^f \longrightarrow V_\lambda^f .$$

Ricordiamo inoltre che se $g \in End(V)$ e $U \subseteq V$

è un sottospazio g-invariante allora il

polinomio caratteristico di $g|_U$ divide il

polinomio caratteristico di g. (Basta scegliere

una base di V ottenuta completando una base

di U e scrivere la matrice di f rispetto

ad essa.)

Quindi anche $g|_{V_\lambda^f}$ ha tutte le radici nel

campo $\Rightarrow$ $\exists$ un autovettore di g dentro V_λ^f

cioè un autovettore comune a g e ad f.

Ciò premesso procediamo per induzione su n. Se $n=1$ non c'è nulla da dimostrare.

Assumiamo l'ipotesi induttiva, vale a dire, se due endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione $< n$ commutano e tali endomorfismi hanno tutti gli autovalori nel campo allora sono simultaneamente triangolabili.

Siano f, g come nelle ipotesi dell'esercizio e sia $v \in V$, $v \neq 0$, un autovettore comune a f e g. Ora consideriamo lo spazio quoziente $V/_{\text{span}\{v\}}$ che ha dimensione $n-1$.

Sia f che g inducono delle applicazioni sul quoziente che, per definizione, commutano. Infatti se $[w] \in V/_{\text{span}\{v\}}$

$$[f][g]([w]) := [f]([g(w)]) = [f \circ g(w)] = [g \circ f(w)] =$$
$$= [g]([f]([w])).$$

Del resto se $\underline{\underline{\{[v_2], \dots, [v_n]\}}} = \mathcal{B}'$ è una base di $V/\mathrm{span}\{v\}$

$\Rightarrow \{v, \underbrace{v_2, \dots, v_n}\} = \mathcal{B}$ è una base di V e

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & * \ * \ \cdots \ * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{} \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}([f])$$

$\Rightarrow$ il polinomio caratteristico di $[f]$ divide il polinomio caratteristico di f $\Rightarrow$ ha tutte le radici nel campo. Similmente per $[g]$.

Dunque $[f], [g] \in \mathrm{End}\left(V/\mathrm{Span}\{v\}\right)$ soddisfano l'ipotesi induttiva $\Rightarrow$ sono simultaneamente triangolabili cioè $\exists$ base $\{[w_2], \dots, [w_n]\}$ di $V/\mathrm{Span}\{v\}$ rispetto alla quale sia la matrice di $[f]$ che la matrice di $[g]$ sono triangolari superiori. Allora la matrice di f e la matrice di g rispetto alla base $\{v, w_2, \dots, w_n\}$ di V sono triangolari superiori.