Foglio di esercizi numero 1

Geometria 1B

Esercizio 1. Sia q un numero razionale fissato e sia α una radice quadrata di q, cioè tale che $\alpha^2 = q$. Verificare che il sottoinsieme $\mathbb{Q}[\alpha]$ di $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \{a + \alpha b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

è un campo di numeri.

Esercizio 2. Mostrare che ogni numero complesso è algebrico su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Mostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Sia $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Mostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}] = \mathbb{Q}[\alpha]$. Determinare il polinomio minimo di α (a coefficienti in $\mathbb{Q}$). Determinare α^{-1}.

Esercizio 5. Mostrare che il polinomio $f = x^2 + x + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mostrare che il campo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ ha 4 elementi e che questi 4 elementi sono le radici del polinomio $x(x-1)(x^2 + x + 1)$.

Esercizio 6. Mostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. Determinare una base di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A.

Esercizio 7. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ una matrice a coefficienti complessi. Indichiamo con $\bar{A}$ la matrice in $M_{m,n}(\mathbb{C})$ i cui elementi sono i coniugati degli elementi di A. Mostrare che $rg(\bar{A}) = rg(A)$.

Esercizio 8. Mostrare che il coniugio è lineare se si considera $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ma non lo è se si considera $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su se stesso.

Esercizio 9. Determinare i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}$.