

Foglio di esercizi numero 2

Geometria 1B

Esercizio 1. Mostrare che il polinomio minimo di una matrice è uguale a quello della sua trasposta.

Esercizio 2. Mostrare che il polinomio minimo di una matrice diagonale a blocchi è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi dei vari blocchi.

Esercizio 3. Mostrare che il polinomio $x^4 - 2$ è irriducibile su \mathbb{Q} ma è riducibile su $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Trovare la fattorizzazione di $x^4 - 2$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

Esercizio 4. Sia $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = f(2) = 0\}$. Si mostri che I è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$ e si determini un generatore di I . Si dica se $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo.

Esercizio 5. Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ non sono campi isomorfi.

Esercizio 6. Calcolare il polinomio minimo della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7. Siano $f, g \in \text{End}(V)$ endomorfismi diagonalizzabili tali che $f \circ g = g \circ f$. Mostrare che f e g sono simultaneamente diagonalizzabili, vale a dire che esiste una base comune di autovettori di f e g .