

Foglio di esercizi numero 3
Geometria 1B

Esercizio 1. Sia $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da: $f(A) = A - 3A^t$.

- a) Determinare autovalori ed autospazi di f .
- b) Determinare il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di f e dire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $F, G : V \rightarrow V$ due endomorfismi tali che:

- a) $F \circ G = G \circ F$;
- b) F è diagonalizzabile;
- c) G è nilpotente.

Dimostrare che esiste una base di autovettori di F rispetto alla quale la matrice di G è triangolare.

Esercizio 3. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice la cui prima riga è $(1, 1, 1)$. Supponiamo che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siano autovettori di A .

- a) Qual è il rango di A ?
- b) Mostrare che A è diagonalizzabile oppure nilpotente.
- c) Fare un esempio di una matrice siffatta diagonalizzabile e di una nilpotente.
- d) Supponiamo che un autospazio abbia equazioni

$$y + x - 2z = y - x = 0.$$

Determinare i coefficienti di A .

Esercizio 4. Sia $N \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice nilpotente. Mostrare che se N ha rango $n - 1$ allora il suo polinomio minimo è uguale al suo polinomio caratteristico.

Esercizio 5. Sia f un endomorfismo tale che $f^2 = f$. Dimostrare che f è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia f un endomorfismo tale che $f^2 = id$. Dimostrare che f è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Trovare due matrici in $M_4(\mathbb{K})$ nilpotenti con lo stesso indice di nilpotenza che non siano simili.

Esercizio 8. Mostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

è nilpotente. Determinare il diagramma di Young e la forma canonica di Jordan di A . Determinare una base di Jordan per A .

Esercizio 9. Determinare la forma canonica di Jordan di una matrice $A \in M_5(\mathbb{C})$ nilpotente con indice di nilpotenza 3 e rango 2.

Esercizio 10. Sia f un endomorfismo nilpotente. Dimostrare che $id - f$ è invertibile.

Esercizio 11. Determinare due matrici a coefficienti complessi con lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo che non siano simili.

Esercizio 12. Determinare due matrici a coefficienti complessi con lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso polinomio minimo, le stesse molteplicità geometriche di tutti gli autovalori ma che non siano simili.