Foglio di esercizi numero 4
Geometria 1B

Esercizio 1. Sia $\mathbb{C}_{\leq 3}[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi nella variabile t di grado minore o uguale a tre. Sia $L : \mathbb{C}_{\leq 3}[t] \to \mathbb{C}_{\leq 3}[t]$ l'endomorfismo definito da:

$$p(t) \mapsto p(t+1) - p(t).$$

Mostrare che L non è diagonalizzabile e determinare una base di $\mathbb{C}_{\leq 3}[t]$ rispetto alla quale la matrice di L sia in forma canonica di Jordan.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{C}_{\leq n}[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi nella variabile t di grado minore o uguale a n. Mostrare che l'applicazione $D : \mathbb{C}_{\leq n}[t] \to \mathbb{C}_{\leq n}[t]$ definita da:

$$p(t) \mapsto \frac{dp(t)}{dt}$$

è nilpotente di ordine $n+1$ e determinare la sua forma canonica di Jordan.

Esercizio 3. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice avente solo autovalore 1 e tale che $A^k = A^{k+1}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Mostrare che $A = I_n$.

Esercizio 4. Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ tale che esista un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^2$ invariante rispetto ad f ma tale che ogni complemento diretto W di U in $\mathbb{R}^2$ non sia f-invariante.

Esercizio 5. Sia v un autovettore di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V, relativo ad un autovalore non nullo. Mostrare che v appartiene all'immagine di f. Dedurre che se f è diagonalizzabile allora $V = \ker(f) \oplus Im(f)$. Vale anche il viceversa?

Esercizio 6. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale f e sia $q_f(t)$ il suo polinomio minimo. Mostrare che f è invertibile se e solo se $q_f(0) \neq 0$. Mostrare inoltre che se f è invertibile allora f^{-1} è un polinomio in f.

Esercizio 7.

a) Sia $g(x) = x^2 - 5$. Mostrare che $g(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$. Siano x_1 e x_2 le radici complesse di $g(x)$. Mostrare che le estensioni $\mathbb{Q}(x_1)$ e $\mathbb{Q}(x_2)$ ottenute aggiungendo rispettivamente x_1 e x_2 a $\mathbb{Q}$ coincidono.

b) Sia $f(x) = x^3 - 2$. Mostrare che $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$. Siano x_1, x_2 e x_3 le radici complesse di $f(x)$. Mostrare che le estensioni $\mathbb{Q}(x_1)$, $\mathbb{Q}(x_2)$ e $\mathbb{Q}(x_3)$ ottenute aggiungendo rispettivamente le radici x_1, x_2 e x_3 a $\mathbb{Q}$ sono sottocampi di $\mathbb{C}$ isomorfi ma distinti.