Foglio di esercizi numero 5
Geometria 1B

Esercizio 1. Mostrare che la funzione $\alpha : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$$\alpha(X, Y) = tr(XY)$$

definisce una forma bilineare simmetrica non degenere su $M_n(\mathbb{K})$. Posto $n = 2$ determinare una base ortogonale ed un sottospazio isotropo di $M_2(\mathbb{K})$ (rispetto ad α).

Esercizio 2. Costruire una forma bilineare non degenere su uno spazio vettoriale V la cui restrizione ad un sottospazio W di V sia degenere.

Esercizio 3. Sia β una forma bilineare (simmetrica) non degenere su uno spazio vettoriale V (di dimensione finita) e sia U un sottospazio di V. Mostrare che $(U^\perp)^\perp = U$.

Esercizio 4. Si consideri la forma bilineare β su $\mathbb{R}^3$ definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a β e determinare la matrice di β rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 5. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $f, g \in V^*$. Mostrare che $\ker f \subset \ker g$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $g = \lambda f$.

Esercizio 6. Sia β una forma bilineare (simmetrica o antisimmetrica) non degenere su uno spazio vettoriale V e siano S, T sottospazi di V. Mostrare che $(S+T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$ e $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$. Stabilire se le stesse relazioni valgono nel caso in cui β sia degenere.

Esercizio 7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\varphi : V \to (V^*)^*$ l'applicazione che a $v \in V$ associa l'elemento $\varphi_v : V^* \to \mathbb{K}$ definito da $\varphi_v(f) = f(v)$. Mostrare che φ è un isomorfismo.

Esercizio 8. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile H tale che $H^T AH$ sia della forma prescritta dal Teorema di Sylvester.

Esercizio 9. Costruire tutte le matrici invertibili $H \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $HH^T = I_2$.

Esercizio 10. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1) Se $\alpha, \beta \in Bil(V)$ sono forme bilineari simmetriche allora $\alpha - \beta$ è una forma bilineare simmetrica.

2) Se $\alpha, \beta \in Bil(V)$ sono forme bilineari simmetriche definite positive allora $\alpha - \beta$ è definita positiva.

3) Il prodotto di due matrici reali simmetriche $n \times n$ è una matrice simmetrica.