Foglio di esercizi numero 6
Geometria 1B

Esercizio 1. Sia $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare su V. Stabilire se esistono due elementi f e g di V^* tali che $\beta(v, w) = f(v)g(w)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi f.

Esercizio 3. Siano $v = (1, 0, 1)^T$ e $w = (1, 1, 0)^T$. Per ognuno dei casi seguenti dire, motivando la risposta, se esiste una matrice ortogonale $A \in O_3(\mathbb{R})$ tale che:

1. $Av = w$;
2. $Av = v$ e $Aw = w$;
3. $Av = w$ e $Aw = -w$;
4. $Av = v - w$.

Esercizio 4. Sia $P \in O_n(\mathbb{R})$ e sia

$$\rho_P : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto PMP^{-1}.$$

Dimostrare che ρ_P è un'isometria di $M_n(\mathbb{R})$ rispetto alla forma bilineare $\beta(A, B) = tr(A^T B)$ (cioè che ρ_P è un'applicazione lineare invertibile tale che $\beta(\rho_P(A), \rho_P(B)) = \beta(A, B)$).

Esercizio 5. Si consideri su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard. Scrivere la matrice che rappresenta nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ la riflessione σ_α rispetto al piano α di equazione $x + y + 2z = 0$.

Esercizio 6. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 0)^T$ e $v_2 = (0, 2, 1)^T$. Si consideri la decomposizione $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$ e la corrispondente proiezione $\pi_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ su V. Scrivere la matrice di π_V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7. Siano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia V^* il duale di V. Siano $f, g : W \to V^*$ applicazioni lineari iniettive. Dimostrare che se $\ker f(x) = \ker g(x)$ per ogni $x \in W$ allora esiste una costante $a \in \mathbb{K}$ tale che $f = ag$.

Esercizio 8. Scrivere la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

come prodotto di una matrice ortogonale e di una matrice triangolare superiore.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia β una forma bilineare simmetrica definita positiva su V. Sia f un endomorfismo di V che trasforma vettori ortogonali in vettori ortogonali. Mostrare che esistono una isometria $g : V \to V$ ed un numero reale λ tali che $f = \lambda g$.