Foglio di esercizi numero 8
Geometria 1B

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = id$.

a) Esiste su V un prodotto scalare definito positivo rispetto al quale f è autoaggiunta?

b) È vero che f risulta autoaggiunta rispetto ad un qualsiasi prodotto scalare su V definito positivo?

Esercizio 2. Siano v, w vettori di $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che la matrice vw^T è simmetrica se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Esercizio 3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica definita positiva. Si dimostri che se esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $A^p = I_n$ allora $A = I_n$.

Esercizio 4. Sia $A \in O_2$. Si dimostri che:

a) se A è la matrice di una rotazione di un angolo $\theta \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora gli autospazi complessi di A non dipendono da θ;

b) se $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per A, allora A è la matrice di una rotazione.

Esercizio 5. Sullo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ si consideri la forma bilineare $\langle X, Y \rangle = tr(XY)$. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sia $\varphi_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare

$$\varphi_A(X) = AX.$$

Determinare le matrici A tali che φ_A sia autoaggiunta rispetto a $\langle\, ,\, \rangle$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\, ,\, \rangle$ un prodotto scalare su V. Sia $P : V \to V$ una proiezione, cioè un'applicazione lineare tale che $P^2 = P$. Si mostri che:

a) P^{ad} è una proiezione;

b) P è una proiezione ortogonale su un sottospazio di V se e solo se $P = P^{ad}$.

Esercizio 7. Sia β la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ definita da:

$$\beta((x, y, z)^T, (x', y', z')^T) = 3xx' + 2yy' + 6zz' - 2xy' - 2yx'.$$

a) Verificare che β definisce su $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare;

b) stabilire se i sottospazi $U_1 = span\{(1, 0, 0)^T\}$ e $U_2 = span\{(0, 1, 0)^T\}$ sono ortogonali tra loro;

c) determinare il sottospazio ortogonale ad U_1 rispetto a β. Calcolare la norma di $(1, 1, 1)^T$ rispetto a β;

d) calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 1, 0)^T$ su U_1 (rispetto a β).