17/3/2020

$f \in End(V)$

$A \in M_n(\mathbb{K})$.

$p \in \mathbb{K}[X]$

$$p(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$$

$$p(f) = a_0 I + a_1 f + \dots + a_d f^d$$

$$p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_d A^d \in End(V)$$

$$\in M_n(\mathbb{K})$$

Se $A = M_{\mathcal{B}}(f) \implies$

$p(A) = M_{\mathcal{B}}(p(f))$. Perché:

perché $M_{\mathcal{B}}(f+g) = M_{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{B}}(g)$

$$M_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{B}}(f)$$

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = M_{\mathcal{B}}(f)^k.$$

<u>OSS.</u> Se A, B matrici simili

$B = CAC^{-1}$ $\quad C \in Gl_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ $p(B) = C\, p(A)\, C^{-1}$.

(perchè $(CAC^{-1})^k = CA\cancel{C^{-1}}\cancel{C}AC^{-1}\ldots$

$= CA^kC^{-1}$.)

OSS. importante.

$f \in End(V)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$

$p, q \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$

$p(f)$ e $q(f)$ $\left(p(A) \text{ e } q(A) \right)$

COMMUTANO:

$$p(f)q(f) = q(f)p(f)$$

$$p(A)q(A) = q(A)p(A).$$

$$p = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$$

$$q = b_0 + b_1 X + \dots + b_s X^s$$

$$p(f)\,q(f) = \left(a_0 I + a_1 f + \dots + a_d f^d\right) \cdot \left(b_0 I + b_1 f + \dots + b_\delta f^\delta\right)$$

$$a_0 I\, b_0 I + a_0 I\, b_1 f + a_1 f\, b_0 I + \left(a_0 I\, b_2 f^2 + a_1 f\, b_1 f + a_2 f^2\, b_0 I + \dots\right)$$

$$a_0 b_0 I + a_0 b_1 \underbrace{I f}_{f} + a_1 b_0 \underbrace{f \cdot I}_{f}$$

$$+ \left(a_0 b_2 I f^2 + a_1 b_1 f f + a_2 b_0 f^2 \cdot I + \dots\right.$$

$q(f)\,p(f) = \dots$ la stessa cosa

$$f^k f^\ell = f^\ell \cdot f^k = f^{k+\ell}.$$

$$f \qquad \mathbb{K}[x] \xrightarrow{p \mapsto p(f)} \mathrm{End}(V)$$

$$A \qquad \mathbb{K}[x] \xrightarrow{p \mapsto p(A)} M_n(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{End}(V) \xrightarrow{M_B} M_n(\mathbb{K})$$

Queste appl. sono om. di anelli

sono anche in particol. lineari come appl. tra $\mathbb{K}$-sp. vett.

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{End}(V) = \dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K})$

è finita, il nucleo è $\neq 0$

Il nucleo è un ideale

Cioè esiste un polinomio [MONICO]

$q_f(x)$ t.c. $q_f(f) = 0$

Se p è un polinomio

t.c. $p(f) = 0 \Rightarrow p$ è

divisibile per q_f.

(q_f è il pol. monico di

grado minimo che annulla

f)

<u>Def</u>. q_f si dice il polinomio MINIMO di f.

Es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

mostrare che q_A $X^2 - 3X + 2$.

(che é anche il pol.

caratteristico).

Teorema (variante del CRT)

Sia $p \in \mathbb{K}[X]$ t.c.

$p(f) = 0$. Se $p = p_1 \cdot p_2$.

$p_1 \, p_2$ PRIMI TRA LORO

$\Rightarrow$

$V = \operatorname{Ker} p_1(f) \oplus \operatorname{Ker} p_2(f)$

Oss. $\operatorname{Ker} p_1(f)$ e $\operatorname{Ker} p_2(f)$ sono

SSV f- INVARIANTI

Es. Se $f \in \text{End}(V)$ t.c.

$$\underbrace{f^2 - 5f + 6I}_{} = 0$$

(V sp. vettoriale / $\mathbb{Q}$)

$\Rightarrow f$ è diagonalizz.

per il teorema

$$p = X^2 - 5X + 6 = \underset{p_1}{(X-2)}\underset{p_2}{(X-3)}$$

$$V = \underbrace{\text{Ker}(f-2I)}_{V_2} \oplus \underbrace{\text{Ker}(f-3I)}_{V_3}$$

<u>Corollario</u> $f \in End(V)$

$p \in \mathbb{K}[X]$ $\quad p(f) = 0$

$p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$

$p_1, \ldots, p_k$ a due a due primi tra loro.

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\operatorname{Ker} p_i(f)}_{\text{sono ssv } f\text{-inv.}}$$

<u>Dim.</u> del corollario per ind su k.

p_1 e $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ primi tra loro

$$V = \operatorname{Ker} p_1(f) \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(p_2 \cdot \ldots \cdot p_k(f))}_{f\text{- invariante}}$$

$p_2, \ldots p_k$

a due a due

primi tra loro

ipotesi induttiva e

$$f\big|_{\operatorname{Ker}(p_2 \cdot \ldots \cdot p_k(f))}$$

$$\operatorname{Ker}(p_2 \cdot \ldots \cdot p_k(f)) = \bigoplus_{i=2}^{k} \operatorname{Ker} p_i(f).$$

Dim del Teorema:

poiché p_1 e p_2 sono primi tra loro, esistono $a, b \in \mathbb{K}[X]$ t.c.

$$1 = a p_1 + b p_2 .$$

Calcoliamo queste id. di polinomi su f

$$I = a(f) p_1(f) + b(f) p_2(f)$$

commutano tra loro

$v \in V$.

$$v = a(f) p_1(f)(v) + b(f) p_2(f)(v)$$

$$v = \underbrace{a(f)p_1(f)(v)}_{= \, p_1(f)(a(f)v)} + \underbrace{b(f)p_2(f)(v)}_{= \, p_2(f)(b(f)v)}$$

$$p_2(f)\big(p_1(f)(a(f)v)\big) = 0$$

$$\underbrace{p_2(f)p_1(f)}_{p(f)\,=\,0}(a(f)v)$$

$$p_1(f)(a(f)v) \in \operatorname{Ker} p_2(f) \qquad p_2(f)(b(f)v) \in \operatorname{Ker} p_1(f)$$

$$\Rightarrow V = \operatorname{Ker} p_2(f) + \operatorname{Ker} p_1(f)$$

per mostrare il teor dobbiamo mostrare che

$$\operatorname{Ker} p_1(f) \cap \operatorname{Ker} p_2(f) = \{0\}$$

$v \in$

$$v = a(f)\underbrace{p_1(f)(v)}_{=0} + b(f)\underbrace{p_2(f)(v)}_{=0} = 0$$

$\square$

Es. si ha anche

$$\operatorname{Ker} p_1(f) = \operatorname{Im} p_2(f)$$

$$\operatorname{Ker} p_2(f) = \operatorname{Im} p_1(f).$$

Es. V sp. vett. su $\mathbb{K}$ f.d. alg. chiuso.

q_f il suo pol. minimo.

$$q_f(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

$\alpha_1 \ldots \alpha_k$ radici DISTINTE

se $i \neq j$ $(X - \alpha_i)^{m_i}$ e $(X - \alpha_j)^{m_j}$ sono primi tra loro

$\Downarrow$ CRT

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f - \alpha_i I)^{m_i}$$

Teorema (Cayley-Hamilton)

f endomorfismo

(A matrice quadrata)

Sia p_f il suo polinomio caratteristico $p_f(X) = \det(f - X I)$

$\Rightarrow p_f(f) = 0$.

Corollario il pol. minimo q_f divide il pol. caratt. p_f.

Dimostriamo C-H nel caso

f sia triangolabile.

(Chiaramente se $A = M_B(f)$

e p_A è il suo pol. caratt.

basta mostrare $p_A(A) = 0$

p_f)

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ & O & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$p_f(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots$$

$$p_f(f) = \underbrace{(a_{11}I - f)}\underbrace{(a_{22}I - f)} \cdots$$

$$\{v_1 \dots v_n\} = \mathcal{B}$$

$$\boxed{f(v_1) = a_{11} v_1}$$

$$f(v_2) = a_{22} v_2 + a_{12} v_1$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{nn} v_n + \dots$$

$$p_f(f)(v_1) = \big((a_{11} I - f) \dots (a_{nn} I - f)\big)(v_1)$$

$$= (a_{22} I - f) \dots (a_{nn} I - f)\underbrace{(a_{11} I - f)(v_1)}$$

$$= 0$$

$$p_f(f)(v_2) = \big(\dots (a_{11} I - f)\big]\underbrace{(a_{22} I - f)\big)(v_2)}_{-a_{12} v_1}$$

e così via

$$p_f(f)\,v_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$$\Rightarrow \quad p_f(f) = 0 \quad !!$$

$$\text{—— . —— . ——}$$