Più dettagli sulla dim del corollario:

$f \in \mathrm{End}(V)$, $p \in \mathbb{K}[x]$

t.c. $p(f) = 0$; $p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$

$p_i \in \mathbb{K}[x]$, p_i sono a due a due primi tra loro

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{Ker}\, p_i(f)}_{\text{ssv } f\text{- invarianti}} .$$

$$p_i(f)\Big|_{\mathrm{Ker}\, p_i(f)} = 0$$

$$\mathrm{Ker}\, p_i(f) = \{ v : p_i(f) v = 0 \}.$$

<u>Dim</u>. $k=2$ è il Teor. già visto.

Supponiamo vero l'enunciato per $k-1$:

Se $q \in \mathbb{K}[X]$ $q = \underbrace{q_2 \cdot \ldots \cdot q_k}_{k-1 \text{ pol.}}$

$q_2 \ldots q_k$ a due a due primi tra loro

$g \in End(W)$: $q(g)=0$

$$\Rightarrow W = \bigoplus_{i=2}^{k} Ker\, q_i(g).$$

per k. (Torniamo alla not. dell'enunciato).

Scrivo $\quad p = p_1 \cdot (p_2 \cdot \ldots \cdot p_k)$

p_1 e $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ sono primi tra loro. (Se esistesse $r \in \mathbb{K}[x]$ che divide p_1 e $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ allora dovrebbe dividere o p_2 o p_3 o ... p_k.)

per il Teor.

$$V = \operatorname{Ker} p_1(f) \oplus \underline{\operatorname{Ker} p_2 \cdot \ldots \cdot p_k}(f) \quad (*)$$

Applichiamo l'ipotesi indutt. come scritto sopra a

$$W = \mathrm{Ker}\left(p_2 \cdot \ldots \cdot p_k(f)\right)$$

$$g = f_{|W} : W \longrightarrow W$$

(ok perché W è f-invariante)

$q = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \qquad q_2 = p_2 \ \ldots$

Trovo (ipotesi induttiva)

$$\underline{\mathrm{Ker}\left(p_2 \cdot \ldots \cdot p_k(f)\right)} = \bigoplus_{i=2}^{k} \mathrm{Ker}\, p_i(f)$$

Sostituendo in (*) troviamo

l'enunciato.

Riepiloghiamo:

$f \in \mathrm{End}(V)$. vogliamo scomporre V in somma diretta di ssv f-invarianti.

- Se ho un polinomio p t.c. $p(f)=0$ $\quad p = p_1 \cdots p_k$

posso scomporre ad esempio in prodotto di (potenze) di pol irriducibili.

l'importante è che $p_1, \dots p_k$ siano a due a due primi tra loro

$$\Rightarrow V = \bigoplus \underbrace{\mathrm{Ker}\, p_i(f)}_{\text{ssv } f\text{-invarianti}} \qquad p_i(f)\big|_{\mathrm{Ker}\, p_i} = 0$$

Il problema è trovare polinomi (non nulli) p t.c. $p(f) = 0$.

- poiché l'appl.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \operatorname{End}(V) \\ p &\longmapsto p(f) \end{aligned}$$

è un om. di anelli, il suo nucleo è un ideale di $\mathbb{K}[X]$. Poiché ogni ideale in $\mathbb{K}[X]$ è principale $\exists!\ q_f$ generatore MONICO di questo ideale che si chiama il polinomio minimo.

$$q_f(f) = 0$$

e se $p(f) = 0 \Rightarrow p$ è divisibile per q.

- Teor. di C-H. se p_f è il pol. caratteristico di $f \Rightarrow$
  $p_f(f) = 0$ cioè

il pol. minimo divide il pol. caratteristico.

<u>Ipotesi</u>: $\mathbb{K}$ contenga tutte le radici di p_f.

questo è automatico se $\mathbb{K}$ è alg. chiuso.

$$\Rightarrow \quad q_f = \prod_{i=1}^{k} \underbrace{(X-\lambda_i)}^{r_i}.$$

come corollario

$$V = \bigoplus_i \underbrace{\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i I)^{r_i}}.$$

<u>OSS</u>. Per il Teor. di C-H i λ_i devono essere autovalori di f.

Perché $$p_f(X) = \prod_{j=1}^{s} \underbrace{(X-\lambda_j)}^{m_j}$$

dove $\lambda_1 \dots \lambda_s$ sono gli autoval. distinti e

$m_1 \dots m_s$ le loro molteplic. algebriche.

Ma siccome il pol. minimo divide quello car.

<u>OSS</u>. A priori q_f potrebbe non contenere qualche $X - \lambda_i$. In realtà sì:

<u>Teor</u>. Se λ_1 è un autovalore di $f \Rightarrow q_f$ è div. per $X - \lambda_1$

quindi, nelle not introdotte

$K = S$ e l' unica cosa in

cui q_f può differire

da p_f sono le molt.

cioè $1 \leq r_i \leq m_i$.

<u>Dim.</u> λ_1 è autovalore di f

scelgo $v_1 \neq 0$ t.c. $f(v_1) = \lambda_1 v_1$

Se $q_f(X)$ non fosse divisibile per λ_1

$$q_f(X) = \prod_{i=2}^{s} \underbrace{(X-\lambda_i)^{r_i}}$$

(cioè manca il fattore $X-\lambda_1$

$$q_f(f) = 0 \qquad q_f(f)(v_1) = 0$$

$$= \boxed{\prod_{i=2}^{s} (f-\lambda_i)^{r_i}(v_1)}$$

$$(f-\lambda_i)(v_1) = f(v_1) - \lambda_i v_1$$

cioè $(\lambda_1 - \lambda_i) v_1$

$$(f - \lambda_i I)^a (v_1) = (\lambda_1 - \lambda_i)^a v_1$$

$$\prod_{i=2}^{s} (f - \lambda_i)^{r_i} (v_1) =$$

$$\Big(\prod_{i=2}^{s} (\lambda_1 - \lambda_i)^{r} \Big) v_1 \neq 0.$$

scalari $\neq 0$

assurdo perché $q_f(f)(v_1) = 0$.

$\square$