$f \in \mathrm{End}(V)$.

IPOTESI: Tutte le radici del pol. caratteristico (= Tutte le radici del pol. minimo) sono in $\mathbb{K}$.

$$p_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{m_i}$$

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ distinti

m_i = molt. alg.

$$q_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda)^{r_i} \qquad 1 \leq r_i \leq m_i.$$

Poiché $p_f(f) = q_f(f) = 0$

e, se $i \neq j$ $(\lambda_i - \lambda)^{\alpha}$ e $(\lambda_j - \lambda)^{\beta}$

PRIMI TRA LORO

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i I)^{m_i}$$

f-INV

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i I)^{r_i}$$

<u>OSS.</u> $m_i \geq r_i$

$$\operatorname{Ker}(f-\lambda_i I)^{r_i} \subseteq \operatorname{Ker}(f-\lambda_i I)^{m_i}$$

ma $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i I)^{r_i} =$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i I)^{m_i}$ quindi

$$\mathrm{Ker}(f-\lambda_i I)^{r_i} = \mathrm{Ker}(f-\lambda_i I)^{m_i}$$

$\forall i = 1 \dots k.$

<u>Oss.</u> $f-\lambda_i I\Big|_{\mathrm{Ker}(f-\lambda_i I)^{r_i}} : \mathrm{Ker}(f-\lambda_i I)^{r_i} \circlearrowleft$

SONO NILPOTENTI (di ordine r_i)

<u>Def.</u> $g \in \mathrm{End}(V)$ si dice nilpotente di ordine r se

$g^r = 0 \qquad (g^{r-1} \neq 0).$

<u>Es.</u> $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilp. di ordine 2.

Siamo ricondotti allo studio degli endom. nilpotenti.

<u>Es.</u> $J_k \in M_k(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \ldots$$

$$J_k(e_1) = 0 \quad J_k(e_2) = e_1 \ldots J_k(e_k) = e_{k-1}.$$

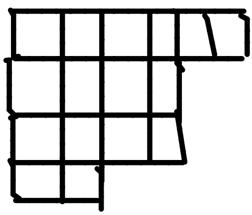
$$0 \leftarrow \boxed{e_1} \leftarrow \boxed{e_2} \leftarrow \boxed{e_3} \leftarrow \boxed{e_4} \leftarrow \boxed{e_5} \leftarrow \boxed{e_6} \qquad k = 6$$

J_k si dice il blocco di Jordan di

NILPOT di ordine K ordine k.

$$p_{J_k}(\lambda) = (-\lambda)^k = \pm q_{J_k}(\lambda).$$

Diagramma di Young



k_1
k_2
$\vdots$
k_ℓ

$$k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_\ell > 0. \quad = \lambda$$

a questo diagramma si associa la matrice

$$J_\lambda \quad \sum_{i=1}^{\ell} k_i \left\{ \begin{pmatrix} J_{k_1} & & & \\ & J_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_\ell} \end{pmatrix} \right.$$

<u>oss.</u> i diagr. di Young con n caselle compl. sono in corr. biunivoca con le partizioni di n

$n = 4$

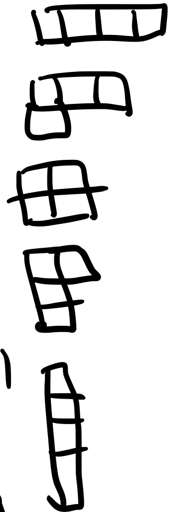
1) $4 = 4$

2) $4 = 3 + 1$

3) $4 = 2 + 2$

4) $4 = 2 + 1 + 1$

5) $4 = 1 + 1 + 1 + 1$



1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se $\lambda = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_e$

J_λ = la corrispondente matrice

ESERCIZIO:

Se λ e λ' sono due diverse partizioni di n, allora J_λ e $J_{\lambda'}$ non sono simili.

(Sugg. guardare la succ. di numeri $\dim \operatorname{Ker} J_\lambda^a \quad a=1 \dots$)

OSS. il pol. minimo di J_λ è λ^{k_1}

TEOR. $f \in End(V)$ ($\mathbb{K}$ campo qualunque) nilpotente, $\dim V = n$

$\Rightarrow$ esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ (base di Jordan) ed esiste una partizione (o un diagramma di Young) λ di n t.c.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = J_\lambda$$

Equiv. una matrice nilpot. è simile a una e una sola matrice di Jordan.

<u>OSS.</u> una matrice strettamente triang. sup.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$ è nilpotente

<u>OSS.</u> se A è una matrice strett. triang. sup.

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n.$$

f endom. ed esiste una base t.c. $M_B(f)$ strett. triang

$$\Rightarrow p_f(\lambda) = (-\lambda)^n.$$

per C-H f è nilpotente

$$0 = p_f(f) = (-f)^n = (-1)^n f^n$$

<u>Proposizione</u>: le seguenti sono equivalenti

1) f nilpotente
2) $\exists \mathcal{B}$ base t.c. $M_{\mathcal{B}}(f)$ è strett. triang. sup.
3) $p_f(\lambda) = (-\lambda)^n$
4) $q_f(\lambda) = \lambda^s$ per qualche $s \leq n$.

$2) \Rightarrow 3)$ già visto

$3) \Rightarrow 4)$ segue dal fatto che q_f divide p_f

$4) \Rightarrow 1)$ dalla def di pol. min

$q_f(f) = 0$.

Manca $1) \Rightarrow 2)$

f nilpot $\Longrightarrow \exists B$ t.c. $M_B(f)$ STRETT. TRIANG.

Mostriamolo per induz.
su $\dim V$.

$\dim V = 1$ l'unico end. nilp.
è quello nullo.
la sua matrice è (0)

Ipot. indutt.
Enunciato vero per $g \in End(W)$
con $\dim W \leq n-1$.

$f \in End(V)$ nilpotente
$\dim V = n$. Osserviamo f
non è invertibile

altrimenti lo sarebbero anche le sue potenze.

quindi $\dim \operatorname{Ker} f > 0$

$$\dim \operatorname{Im} f \leq n-1$$

inoltre $\operatorname{Im} f$ è f-invariante

quindi applicando l'ipot. induttiva a $f_{|_{\operatorname{Im} f}} : \operatorname{Im} f \circlearrowleft$

esiste $\{v_1 \dots v_r\} = \mathcal{B}'$ base di $\operatorname{Im} f$

t.c. $M_{\mathcal{B}'}(f_{|_{\operatorname{Im} f}}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$B = \{v_1 \dots v_r, v_{r+1} \dots v_n\}$$

completamento della base

$$f(v_{r+1}), \dots f(v_n) \in \mathrm{Im}(f)$$
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{v_1 \dots v_r\}$$

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & \ast \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matrice risultate è str. triang. superiore.