Ricordiamo le notazioni per le matrici di Jordan: Fissiamo n,
Sia $\underline{k}$ una successione non crescente

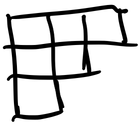
$$\underline{k} = (k_1, \dots k_e) \qquad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_e > 0$$

di interi positivi, con $k_1 + k_2 + \dots + k_e = n$
(= una partizione di n, un modo di scrivere n come somma di interi.
La non decrescenza assicura l'unicità della scrittura, ad esempio

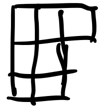
$$5 = 3 + 2$$
$$5 = 2 + 3$$

sono considerate la stessa partizione.

La partizione si visualizza col diagramma di Young



k_1 caselle
k_2 caselle
$\vdots$

es  $= (3,2,2)$

per $k > 0$ $\quad J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ si dice il blocco di Jordan di ordine k. Alla partizione $\underline{k}$

si associa la matrice $J_{\underline{k}}$ che è diagonale a blocchi con un blocco di ordine k_1, uno di ordine k_2 etc... $J_{\underline{k}} \in M_n(\mathbb{K})$

$$J_{\underline{k}} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_{k_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{J_{k_3}} \end{pmatrix} \quad \text{es. } J_{(3,2,2)} = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & 0 & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>OSS.</u> Se permutassimo i blocchi di Jordan di una stessa partizione otterremo matrici simili: es.

$$J_{(3,2,2)} \simeq \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

basta permutare i vettori della base.

Torniamo al seguente

<u>ESERCIZIO</u>:

Se $\underline{k}$ e $\underline{k}'$ sono due diverse partizioni di n, allora $J_{\underline{k}}$ e $J_{\underline{k}'}$ non sono simili.

(Sugg. guardare la succ. di numeri $\dim \operatorname{Ker} J_{\underline{k}}^{a}$ $a=1, \dots$)

<u>OSS.</u> il pol. minimo di $J_{\underline{k}}$ è λ^{k_1}

lo facciamo perché la soluzione dice come si costruisce il diagramma di Young a partire da f o equivalentemente a partire da dati sulla matrice A che sono invarianti per similitudine:

L'osservazione è che se associo a $\underline{k}$ il diagramma di Young, allora $J_{\underline{k}}$ dà un endo di $\mathbb{K}^n$ in cui l'applicazione corrisponde a spostare il vettore di un passo a sinistra: es

e_1	e_2	e_3
e_4	e_5	
e_6	e_7	

$$e_3 \to e_2 \to e_1 \to 0$$
$$e_5 \to e_4 \to 0$$
$$e_7 \to e_6 \to 0$$

da cui vediamo che

$\dim \operatorname{Ker} J_{\underline{k}} = \#$ caselle nella prima colonna

$\dim \operatorname{Ker} J_{\underline{k}}^2 = \#$ caselle nelle prime due colonne

etc...

Perciò se $J_{\underline{k}} \sim J_{\underline{k}'} \Rightarrow$

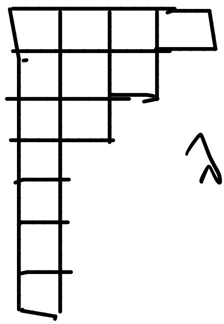
$\dim \operatorname{Ker} J_{\underline{k}}^a = \dim \operatorname{Ker} J_{\underline{k}'}^a \quad \forall a = 1 \dots$

ma data la successione di interi

$\dim \operatorname{Ker} A \leq \dim \operatorname{Ker} A^2 \leq \dots \leq \dim \operatorname{Ker} A^e$

c'è un solo modo per costruire un diagramma di Young.

Es. prendiamo la successione $7, 10, 12, 13$. L'unico diagramma possibile è



cioè $\lambda = (4, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$

In particolare se ho $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente, il teorema della base di Jordan mi dice che esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto la quale $M_{\mathcal{B}}(f) = J_{\underline{k}}$ per qualche $\underline{k}$. Adesso sappiamo che questo $\underline{k}$ è unico, e sappiamo come determinarlo partendo dalla successione $\dim \mathrm{Ker} f, \dim \mathrm{Ker} f^2, \dim \mathrm{Ker} f^3, \dots$

E infine, la dimostrazione del teorema: fissiamo la notazione

Data $\underline{k} = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_e > 0$ diciamo che una base $\mathcal{B}$ è di Jordan (di tipo $\underline{k}$) se è della forma

$$\{ v_1^{(1)}, \dots v_{k_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots v_{k_2}^{(2)}, \dots\dots, v_1^{(e)}, \dots v_{k_e}^{(e)} \}$$

con le proprietà: $\begin{cases} f(v_1^{(a)}) = 0 \quad \forall a = 1 \dots e \\ f(v_i^{(a)}) = v_{i-1}^{(a)} \quad \forall a = 1 \dots e \\ \qquad\qquad \forall i = 2, \dots k_a \end{cases}$

(quindi $M_{\mathcal{B}}(f) = J_{\underline{k}}$).

<u>Teorema</u> Se $f \in \mathrm{End}(V)$ è nilpotente $\Rightarrow$ esiste una base di Jordan (e il suo tipo $\underline{k}$

è determinato come spiegato prima a partire dalla successione $\dim \operatorname{Ker} f, \dim \operatorname{Ker} f^2$ etc...

L'osservazione utile per capire la dimostrazione è che se mettiamo i vettori della base nel diagramma di Yang, una base di $\operatorname{Im} f$ è data dai vettori che non sono "ultimi a destra" in ogni riga: Es.

$v_1^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	$v_3^{(1)}$	$\cancel{v_4^{(1)}}$
$v_1^{(2)}$	$v_2^{(2)}$	$\cancel{v_3^{(2)}}$	
$v_1^{(3)}$	$\cancel{v_2^{(3)}}$		
$\cancel{v_1^{(4)}}$			
$\cancel{v_1^{(5)}}$			
$\cancel{v_1^{(6)}}$			
$\cancel{v_1^{(7)}}$			

cioè

$$\underline{k} = (4,3,2,1,1,1,1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_1^{(3)}\}$$

Inoltre $\{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_1^{(3)}\}$

è una base di Jordan per $f|_{\mathrm{Im} f}$

e il tipo è $(3,2,1) =$

$(4,3,2,1,1,1,1) - (1,1,1,1,1,1,1)$.

<u>Dim</u> Per induzione su $\dim V = n$.

$n=1$ l'unico end nilp. è 0, niente da dimostrare.

<u>Ipot. INDUTTIVA</u> per ogni $g \in \mathrm{End}(W)$ g nilpotente, $\dim W < n$, esiste una base di Jordan.

Poichè f è nilpotente $\dim \operatorname{Ker} f > 0$ quindi $\dim \operatorname{Im} f < \dim V$.

$\operatorname{Im} f$ è f-invariante e

$f_{|_{\operatorname{Im} f}} : \operatorname{Im} f \circlearrowleft$ è nilpotente.

Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva: Sia $\underline{k}' = k_1' \geq k_2' \geq \dots \geq k_a'$ la partizione associata a $f_{|_{\operatorname{Im} f}}$ e indichiamo

$$\mathcal{B}' = \{ v_1^{(1)}, \dots, v_{k_1'}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{k_2'}^{(2)}, \dots, v_1^{(a)}, \dots v_{k_a'}^{(a)} \}$$

la base di Jordan per $f_{|_{\operatorname{Im} f}}$.

<u>OSS.</u> $\dim \operatorname{Im} f = \sum_{i=1}^{a} k_i' =: r$

<u>OSS.</u> $\{ v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots v_1^{(a)} \}$ è una base di $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.

Completiamola a

$$\{ v_1^{(1)}, \dots v_1^{(a)}, v_1^{(a+1)}, \dots \dots v_1^{(n-r)} \}$$

Teor. del rango

consideriamo i vettori

$$\{ v_{k_1'}^{(1)}, v_{k_2'}^{(2)}, \dots v_{k_a'}^{(a)} \}$$ cioè i

vettori più a destra in ogni riga del diagramma di Young per $f|_{\mathrm{Imf}}$

questi vettori sono nell'immagine di f quindi esistono

$v^{(1)}, \dots v^{(a)}$ t.c.

$$f(v^{(1)}) = v_{k_1'}^{(1)}, \dots f(v^{(a)}) = v_{k_a'}^{(a)}$$

Adesso mostriamo che

$$\left\{ v_1^{(1)}, \dots, v_{k_1'}^{(1)}, v^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{k_2'}^{(2)}, v^{(2)}, \dots, v_1^{(a)}, \dots v_{k_a'}^{(a)}, v^{(a)}, v_1^{(a+1)}, \dots \; v_1^{(n-r)} \right\}$$

è una base di V. Per costruzione sarà una base di Jordan.

Notiamo che questi vettori sono n, perché siamo partiti dagli r vettori della base di $\operatorname{Im} f$ e abbiamo aggiunto $v^{(1)}, \dots v^{(a)}, v_1^{(a+1)} \dots v_1^{(n-r)}$ cioè $n-r$ vettori.

Basta quindi mostrare che sono indip.

Scriviamo

$$a_0^{(1)} v_1^{(1)} + \dots + a_{k_1'-1}^{(1)} v_{k_1'}^{(1)} + a_{k_1'} v^{(1)} + \dots + a_0^{(a)} v_1^{(a)} + \dots + a_{k_a'-1} v_{k_a'}^{(a)}$$

$$+ a_{k_a} v^{(a)} + a^{(a+1)} v_1^{(a+1)} + \dots + a^{(n-r)} v_1^{(n-r)} = 0$$

$$a_0^{(1)} v_1^{(1)} + \dots + a_{k_1'-1}^{(1)} v_{k_1'}^{(1)} + a_{k_1'} v^{(1)} + \dots + a_0^{(a)} v_1^{(a)} + \dots + a_{k_a'-1} v_{k_a'}^{(a)}$$

$$+ a_{k_a} v^{(a)} + a_0^{(a+1)} v_1^{(a+1)} + \dots + a_0^{(n-r)} v_1^{(n-r)} = 0 \qquad (*)$$

applichiamo f e troviamo

$$a_1^{(1)} v_1^{(1)} + \dots + a_{k_1'}^{(1)} v_{k_1'}^{(1)} + \dots + a_1^{(a)} v_1^{(a)} + \dots + a_{k_a'}^{(a)} v_{k_a'}^{(a)} = 0$$

ma i vettori in questa comb. lineare sono per ipotesi lin. indip. quindi

$a_i^{(j)} = 0$ per $j = 1 \dots a$ e $i = 1, \dots k_j'$.

cancellando i termini in $(*)$ troviamo:

$$a_0^{(1)} v_1^{(1)} + \dots + a_0^{(a)} v_1^{(a)} + a_0^{(a+1)} v_1^{(a+1)} + \dots + a_0^{(n-r)} v_1^{(n-r)} = 0$$

ma per costruzione $v_1^{(1)} \dots v_1^{(n-r)}$ è una base del nucleo e il teorema è provato (UFF!) $\square$

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\underline{k}$ è una partizione (di d) poniamo

$$J_{\lambda,\underline{k}} := \lambda \, Id_n + J_{\underline{k}} \in M_d(\mathbb{K}).$$

<u>Oss.</u> $p_{J_{\lambda,\underline{k}}}(X) = (\lambda - X)^d$

<u>Corollario</u> Sia $f \in End(V)$ t.c. tutte le radici di $p_f(\lambda)$ siano in $\mathbb{K}$;

Siano $\lambda_1, \ldots\ldots \lambda_r$ le radici distinte

$m_1, \ldots m_r$ le relative molteplic

i.e. $p_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i}$

$\Rightarrow$ Esistono $\underline{k}_1$ partizione di m_1,

$\ldots$ $\underline{k}_r$ partizione di m_r, ed

esiste una base $\mathcal{B}$ di V t.c.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\lambda_1, \underline{k_1}} & & \\ \hline & J_{\lambda_2, \underline{k_2}} & \\ \hline & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_r, \underline{k_r}} \end{array}\right)$$

Dim.

Siano

$d_1 = \dim \mathrm{Ker}(f-\lambda_1 I)^{m_1}, \ldots \quad d_r = \dim \mathrm{Ker}(f-\lambda_r I)^{m_r}$

le dimensioni degli autospazi generalizzati.

Dal CRT, dall'osserv. che

$(f-\lambda_i I)\big|_{\mathrm{Ker}(f-\lambda_i I)^r}$ è nilpotente

e dal Teorema sull'esistenza

dalla base di Jordan, si ha una base $\mathcal{B}$ t.c.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, \underline{k}_1} & & \\ & J_{\lambda_2, \underline{k}_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_r, \underline{k}_r} \end{pmatrix}$$

con $\underline{k}_1$ partizione di $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 I)^{m_1}$

... $\underline{k}_r$, - - - - $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_r I)^{m_r}$.

Calcolando il pol. caratteristico si vede

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i I)^{m_i} = m_i \quad \square$$