Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Esempio di prova scritta

Esercizio 1. Dato il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \langle (1,1,1), (1,2,2), (1,3,3) \rangle,$$

(a) calcolare la dimensione di W e determinare una sua base $\mathcal{B}$;

(b) completare $\mathcal{B}$ in una base di $\mathbb{R}^3$;

(c) stabilire se il vettore $v = (1,0,0)$ appartiene a W e, in caso affermativo, determinare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$;

(d) determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $\dim(W \cap T) = 1$;

(e) è possibile descrivere W come insieme di soluzioni di un'equazione lineare? In caso affermativo si scriva una equazione lineare che abbia W come insieme di soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z dipendente dal parametro reale k:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 1 - k \\ kx + (4-k)y + kz = 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare Σ_k ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

(b) Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_k interpretato ora come sistema lineare nelle 4 incognite x, y, z, t.

Eercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(a,b,c) = (0, a + 3b - 2c, 2a + 6b - 4c).$$

i) Calcolare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

iii) Stabilire se la funzione T è iniettiva e/o suriettiva.

ii) Determinare gli autovalori di A e dire se A è diagonalizzabile; in caso affermativo trovare una matrice diagonalizzante A.

Eercizio 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare, per induzione su $n \geq 1$, che si ha:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & (3^n - 1)/2 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$