Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Esempio di prova scritta

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \langle (1,1,1), (-2,-2,1), (3,3,1) \rangle, \quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}.$$

(a) Determinare una base di S e una base di T e calcolare le dimensioni dei due sottospazi;

(b) Determinare un sistema lineare avente S come insieme di soluzioni;

(c) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap T$;

(d) completare $\mathcal{B}$ in una base di S e in una base di T;

(e) stabilire se il vettore $v = (1,0,0)$ si può scrivere come somma di un vettore di S e di uno di T. Tale scrittura è unica?

Esercizio 2.

(a) Risolvere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + (3k+1)y + (2k+1)z = 5k+2 \\ (3k)y + (4+k)z = 4+4k \end{cases}$$

(b) Stabilire se esistono dei vettori $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che siano soluzioni di Σ_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si considerino gli endomorfismi f_s di $\mathbb{R}^3$ definiti, rispetto alla base canonica, dalle matrici

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -s \\ s & -s & s \\ 2 & s & -4 \end{pmatrix}$$

al variare di $s \in \mathbb{R}$.

a) Esiste qualche f_s suriettiva? Per quali valori di s?

b) Per $s = -5$ si scriva una base di $Im(f_{-5})$ e una di $ker(f_{-5})$.

c) A_0 è diagonalizzabile? In caso affermativo si determini una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_0.

d) Esiste qualche f_s per cui $(5,5,0) \in ker(f_s)$? Per quali valori di s?

Esercizio 4. *a*) Si determinino le soluzioni, fra loro non congrue modulo 10, della congruenza lineare

$$8x \equiv 4 \pmod{10}.$$

b) Si risolva il sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod 5. \end{cases}$$