Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA. Prof.ssa Cantarini
Esempio di prova scritta

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $S = (1,1,1) + \langle (1,-1,1), (1,1,2) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite avente S come insieme di soluzioni.
3. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite avente S come insieme di soluzioni.
4. Determinare, se possibile, due diversi sistemi lineari aventi S come insieme di soluzioni.
5. Interpretare geometricamente l'insieme S.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle (1,t,0,0), (1,1,0,t), (2,1+t,t,1+t), (2,2,t,2+t) \rangle.$$

1. Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione di A_t ed una sua base $\mathcal{B}_t$;
2. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1,1,1,1)$ appartiene ad A_t e per uno dei valori trovati, calcolare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}_t$.

Esercizio 3. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ -1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si determinino, per ogni valore di α, $\ker f$, Imf e le loro dimensioni.

(b) Si determinino i valori di α per cui f non è suriettiva.

(c) Per i valori di α di cui al punto (b) si dica se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. *a*) Stabilire se gli elementi $[5]_{10}$, $[7]_{10}$, $[9]_{10}$ sono invertibili in $\mathbb{Z}_{10}$. In caso affermativo se ne calcolino gli elementi inversi.
b) Risolvere, se possibile, la congruenza lineare $7x \equiv 16 \pmod{10}$.