Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Terzo Appello
Bologna, 8 luglio 2013
TEMA n.1

Esercizio 1. (8 punti)

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z, t ammette soluzioni:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 2y + z + 2t = 1 \\ y + z + 2t = 0 \\ x + y + kt = 0 \\ ky + k^2 z + 2kt = 0; \end{cases}$$

b) per i valori di k per cui Σ_k è risolubile, dire quante soluzioni ammette;

c) stabilire se esistono valori di k per cui il sistema Σ_k è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ y + z = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = c \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -c \right\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di A e calcolare la loro dimensione;

b) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap A$ e completare $\mathcal{B}$ in una base di S;

c) costruire, se possibile, una funzione lineare $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = A$;

d) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $Img = S$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se 0 e/o 2 sono autovalori di f;

c) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*continua*)

d) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare $g(x, y, z) = (2y, 2x)$. Determinare la forma esplicita della funzione $g \circ f$ ($g \circ f(x, y, z) = \dots$).

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si dimostri, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Terzo Appello
Bologna, 8 luglio 2013
TEMA n.2

Esercizio 1. (8 punti)

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z, t ammette soluzioni:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 2y + 2z + t = 1 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + y + kz = 0 \\ ky + 2kz + k^2 t = 0; \end{cases}$$

b) per i valori di k per cui Σ_k è risolubile, dire quante soluzioni ammette;

c) stabilire se esistono valori di k per cui il sistema Σ_k è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - t = -1 \\ y + t = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = 2c \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -2c \right\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di A e calcolare la loro dimensione;

b) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap A$ e completare $\mathcal{B}$ in una base di S;

c) costruire, se possibile, una funzione lineare $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = S$;

d) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $Img = A$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se 0 e/o -1 sono autovalori di f;

c) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*continua*)

d) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare $g(x, y, z) = (z, x)$. Determinare la forma esplicita della funzione $g \circ f$ $(g \circ f(x, y, z) = \dots)$.

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si dimostri, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Terzo Appello
Bologna, 8 luglio 2013
TEMA n.3

Esercizio 1. (8 punti)

a) Stabilire per quali valori del parametro reale a il seguente sistema lineare Σ_a nelle incognite x, y, z, t ammette soluzioni:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x + y + at = 0 \\ x + 2y + z + 2t = 1 \\ y + z + 2t = 0 \\ ay + a^2 z + 2at = 0; \end{cases}$$

b) per i valori di a per cui Σ_a è risolubile, dire quante soluzioni ammette;

c) stabilire se esistono valori di a per cui il sistema Σ_a è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ y + z = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2b = c \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2b = -c \right\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di A e calcolare la loro dimensione;

b) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap A$ e completare $\mathcal{B}$ in una base di S;

c) costruire, se possibile, una funzione lineare $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = A$;

d) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $Img = S$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se 0 e/o 3 sono autovalori di f;

c) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(*continua*)

d) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare $g(x, y, z) = (-y, -z)$. Determinare la forma esplicita della funzione $g \circ f$ $(g \circ f(x, y, z) = \dots)$.

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si dimostri, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Terzo Appello
Bologna, 8 luglio 2013
TEMA n.4

Esercizio 1. (8 punti)

a) Stabilire per quali valori del parametro reale a il seguente sistema lineare Σ_a nelle incognite x, y, z, t ammette soluzioni:

$$\Sigma_a : \begin{cases} x + y + az = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 1 \\ ay + 2az + a^2 t = 0; \end{cases}$$

b) per i valori di a per cui Σ_a è risolubile, dire quante soluzioni ammette;

c) stabilire se esistono valori di a per cui il sistema Σ_a è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - t = -1 \\ x + y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b - c = 0 \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b + 2c = 0 \right\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di A e calcolare la loro dimensione;

b) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap A$ e completare $\mathcal{B}$ in una base di S;

c) costruire, se possibile, una funzione lineare $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = S$;

d) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $Img = A$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se 0 e/o 1 sono autovalori di f;

c) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*continua*)

d) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare $g(x, y, z) = (y, x)$. Determinare la forma esplicita della funzione $g \circ f$ ($g \circ f(x, y, z) = \dots$).

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si dimostri, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.