Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Secondo Appello
Bologna, 14 giugno 2013
TEMA n.1

Esercizio 1. (7 punti) Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k e lo si risolva nel caso in cui ci sono infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z = k \\ x - y + 8z = 7k \\ kx + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1,0,1,1), (1,2,1,1), (1,-2,1,1) \rangle, \qquad T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di T e calcolare la loro dimensione;

b) stabilire se $S \subset T$;

c) determinare, se possibile, un sistema lineare di due equazioni avente S come insieme di soluzioni.

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, x + y + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) calcolare l'immagine del vettore $(1, 1, 1)$ tramite f;

c) calcolare la controimmagine del vettore $(1, 1, 1)$ tramite f;

c) stabilire se il sottospazio $U = \langle (3, -2, -1), (1, 0, 1) \rangle$ è autospazio di f;

d) stabilire se 2 è autovalore di f e, in caso affermativo, determinare una base dell'autospazio ad esso relativo;

e) costruire, se possibile, un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$, $g \neq f$, tale che $Imf = Img$ e $\ker f = \ker g$.

Esercizio 4. (7 punti)

a) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

b) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) Calcolare la somma dei primi n numeri pari per ogni $n \in \mathbb{N}$.

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Secondo Appello
Bologna, 14 giugno 2013
TEMA n.2

Esercizio 1. (7 punti) Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k e lo si risolva nel caso in cui ci sono infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + 8z = 7k + 7 \\ x + 2y - z = k + 1 \\ (k+1)x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (0,1,1,1), (2,1,1,1), (-2,1,1,1) \rangle, \qquad T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di T e calcolare la loro dimensione;

b) stabilire se $S \subset T$;

c) determinare, se possibile, un sistema lineare di due equazioni avente S come insieme di soluzioni.

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y + z, x - y + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) calcolare l'immagine del vettore $(2,2,2)$ tramite f;

c) calcolare la controimmagine del vettore $(2,2,2)$ tramite f;

c) stabilire se il sottospazio $U = \langle (1,0,-1), (-1,-2,1) \rangle$ è autospazio di f;

d) stabilire se 2 è autovalore di f e, in caso affermativo, determinare una base dell'autospazio ad esso relativo;

e) costruire, se possibile, un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$, $g \neq f$, tale che $Imf = Img$ e $\ker f = \ker g$.

Esercizio 4. (7 punti)

a) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n}(2k) = n^2 + n$.

b) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) Calcolare la somma dei primi n numeri dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$.

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Secondo Appello
Bologna, 14 giugno 2013
TEMA n.3

Esercizio 1. (7 punti) Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k e lo si risolva nel caso in cui ci sono infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z = k - 1 \\ x - y + 8z = 7k - 7 \\ (k-1)x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1,0,1,1), (1,3,1,1), (1,-3,1,1) \rangle, \qquad T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di T e calcolare la loro dimensione;

b) stabilire se $S \subset T$;

c) determinare, se possibile, un sistema lineare di due equazioni avente S come insieme di soluzioni.

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, x + y + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) calcolare l'immagine del vettore $(1, 2, 1)$ tramite f;

c) calcolare la controimmagine del vettore $(1, 2, 1)$ tramite f;

c) stabilire se il sottospazio $U = \langle (1,0,1), (6,-4,-2) \rangle$ è autospazio di f;

d) stabilire se 2 è autovalore di f e, in caso affermativo, determinare una base dell'autospazio ad esso relativo;

e) costruire, se possibile, un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $Imf = Img$ e $\ker g = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

Esercizio 4. (7 punti)

a) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

c) Calcolare la somma dei primi n numeri pari per ogni $n \in \mathbb{N}$.

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Secondo Appello
Bologna, 14 giugno 2013
TEMA n.4

Esercizio 1. (7 punti) Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k e lo si risolva nel caso in cui ci sono infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z = k \\ 2x + y + 7z = 8k \\ kx + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1,1,3,1), (1,1,-2,1), (1,1,-1,1) \rangle, \qquad T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = t\}.$$

a) Determinare una base di S ed una base di T e calcolare la loro dimensione;

b) stabilire se $S \subset T$;

c) determinare, se possibile, un sistema lineare di due equazioni avente S come insieme di soluzioni.

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y + z, x - y + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) calcolare l'immagine del vettore $(2,2,2)$ tramite f;

c) calcolare la controimmagine del vettore $(2,2,2)$ tramite f;

c) stabilire se il sottospazio $U = \langle (-1,-2,1), (2,0,-2) \rangle$ è autospazio di f;

d) stabilire se 1 è autovalore di f e, in caso affermativo, determinare una base dell'autospazio ad esso relativo;

e) costruire, se possibile, un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $Img = \langle (1,1,1), (1,3,1) \rangle$ e $\ker f = \ker g$.

Esercizio 4. (7 punti)

a) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^{n} (2k) = n^2 + n$.

c) Calcolare la somma dei primi n numeri dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$.

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.