Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Quarto Appello
Bologna, 16 settembre 2013
TEMA n.1

Esercizio 1. (8 punti)

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z ammette soluzioni:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + (3k+1)y + (2k+1)z = 5k+2 \\ (3k)y + (4+k)z = 4+4k. \end{cases}$$

b) Per ognuno dei valori di k per cui Σ_k ha una sola soluzione, determinare tale soluzione.

c) Stabilire se esistono valori di k per cui l'insieme delle soluzioni di Σ_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. (9 punti) Sia $S_t = \langle (1,t,1), (1,t,2), (1,-t,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Al variare del parametro reale t determinare una base $\mathcal{B}_t$ di S_t;

b) stabilire per quali valori reali di t il vettore $v = (1,0,0)$ appartiene ad S_t e per ognuno dei valori trovati calcolare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}_t$;

c) stabilire se esistono valori di t tali che S_t sia l'immagine di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker f = \langle (-1,0,0) \rangle$. In caso affermativo scrivere la matrice di una siffatta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e stabilire se esiste una unica funzione f soddisfacente le condizioni richieste.

Esercizio 3. (10 punti) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente $\langle (1,2,1), (1,1,1) \rangle$ e $\langle (1,0,-1) \rangle$ come autospazi relativi, rispettivamente, agli autovalori 0 ed 1.

a) Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{(1,2,1), (1,1,1), (1,0,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio;

b) stabilire se f è diagonalizzabile;

c) stabilire se i vettori $(0,1,0)$ e $(2,1,0)$ sono autovettori di f;

d) stabilire se esistono basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. (4 punti) Dimostrare, procedendo per induzione su $n \geq 1$, che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

N.B. Ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Tutte le risposte prive di motivazione verranno ignorate.