Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Primo Appello
Bologna, 28 maggio 2013
TEMA n.1

Esercizio 1. (7 punti) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 1 \\ 2x + k^2y + (k-1)z = 2 \\ 4x + 2ky + (k-3)z = k^2 + 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per cui esso ammette infinite soluzioni.

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}, \qquad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}.$$

a) Stabilire se S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;

b) stabilire se $S \cap T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo determinarne una base;

c) determinare una base del sottospazio vettoriale $\langle S \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y, x + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se la funzione f è invertibile;

c) stabilire se i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ sono autovettori di f;

d) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f. In caso affermativo determinarla;

e) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, non identicamente nulla, tale che $g \circ f = 0$.

Esercizio 4. (5 punti)

a) Stabilire se $[3]_{11}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{11}$. In caso affermativo determinarne l'inverso.

b) Stabilire se la congruenza lineare $3x \equiv 7 \pmod{11}$ ammette soluzioni in $\mathbb{Z}$. In caso affermativo determinare tali soluzioni.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Primo Appello
Bologna, 28 maggio 2013
TEMA n.2

Esercizio 1. (7 punti) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + (1+k)y - z = 1 \\ 2x + (1+k)^2 y + kz = 2 \\ 4x + (2k+2)y + (k-2)z = k^2 + 2k + 2 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per cui esso ammette infinite soluzioni.

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}, \qquad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}.$$

a) Stabilire se S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;

b) stabilire se $S \cap T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo determinarne una base;

c) determinare una base del sottospazio vettoriale $\langle S \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + z, -y, x + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se la funzione f è invertibile;

c) stabilire se i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono autovettori di f;

d) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f. In caso affermativo determinarla;

e) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, non identicamente nulla, tale che $g \circ f = 0$.

Esercizio 4. (5 punti)

a) Stabilire se $[5]_{11}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{11}$. In caso affermativo determinarne l'inverso.

b) Stabilire se la congruenza lineare $5x \equiv 7 \pmod{11}$ ammette soluzioni in $\mathbb{Z}$. In caso affermativo determinare tali soluzioni.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Primo Appello
Bologna, 28 maggio 2013
TEMA n.3

Esercizio 1. (7 punti) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x - ky - z = 1 \\ 2x + k^2 y - (k+1)z = 2 \\ 4x - 2ky - (k+3)z = k^2 + 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per cui esso ammette infinite soluzioni.

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid yz = 0\}, \qquad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}.$$

a) Stabilire se S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;

b) stabilire se $S \cap T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo determinarne una base;

c) determinare una base del sottospazio vettoriale $\langle S \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + z, -2y, x + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se la funzione f è invertibile;

c) stabilire se i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, -1, 0)$ sono autovettori di f;

d) stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f. In caso affermativo determinarla;

e) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, non identicamente nulla, tale che $f \circ g = 0$.

Esercizio 4. (5 punti)

a) Stabilire se $[3]_{13}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{13}$. In caso affermativo determinarne l'inverso.

b) Stabilire se la congruenza lineare $3x \equiv 7 \pmod{13}$ ammette soluzioni in $\mathbb{Z}$. In caso affermativo determinare tali soluzioni.

Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Primo Appello
Bologna, 28 maggio 2013
TEMA n.4

Esercizio 1. (7 punti) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + 2ky - z = 1 \\ 2x + 4k^2y + (2k-1)z = 2 \\ 4x + 4ky + (2k-3)z = 4k^2 + 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per cui esso ammette infinite soluzioni.

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}, \quad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}.$$

a) Stabilire se S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$;

b) stabilire se $S \cap T$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e in caso affermativo determinarne una base;

c) determinare una base del sottospazio vettoriale $\langle T \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri il seguente endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + z, 3y, x + z).$$

a) Calcolare nucleo e immagine di f;

b) stabilire se la funzione f è iniettiva e/o suriettiva;

c) stabilire se i vettori $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono autovettori di f;

d) stabilire se f è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f;

e) costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, non identicamente nulla, tale che $f \circ g = 0$.

Esercizio 4. (5 punti)

a) Stabilire se $[7]_{13}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{13}$. In caso affermativo determinarne l'inverso.

b) Stabilire se la congruenza lineare $7x \equiv 9 \pmod{13}$ ammette soluzioni in $\mathbb{Z}$. In caso affermativo determinare tali soluzioni.