NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 14/06/2019
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

1) Ogni applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,0) = (0,0)$ è lineare.
FALSO: per esempio l'applicazione $f(x,y) = (x^2, 0)$ soddisfa la condizione $f(0,0) = (0,0)$ ma non è lineare. Infatti $f(1,0) = (1,0)$, $f(-1,0) = (1,0)$ ma $f((1,0) + (-1,0)) = f(0,0) = (0,0) \neq (1,0) + (1,0) = (2,0)$.

2) Se una matrice quadrata di ordine n ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.
VERO: in tal caso infatti la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale ad 1 e pertanto coincide con la molteplicità geometrica.

3) Due sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ sono sempre in somma diretta.
FALSO: controesempio: $S = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$, $T = \langle (1,0,0,0), (0,0,1,0) \rangle$. Si ha $S \cap T = \langle (1,0,0,0) \rangle$.

Esercizio 1 Siano $U = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.

a) È possibile descrivere U mediante una sola equazione lineare? In caso affermativo determinarla.
b) Calcolare una base $\mathcal{B}$ di $U \cap V$.
c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di U e in una base di V.
d) Determinare una base di $U + V$.

SVOLGIMENTO. a) I vettori $(1,1,1)$ e $(1,2,1)$ sono linearmente indipendenti perciò U ha dimensione 2 e può essere descritto mediante l'equazione $x = z$.

b) Da a) segue che $U \cap V$ è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x = z \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Quindi $U \cap V = \{(x,0,x) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,0,1) \rangle$.

c) $U = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$, $V = \langle (1,0,1), (1,1,0) \rangle$.

d) Dal momento che $\dim(U) = 2 = \dim(V)$ e $\dim(U \cap V) = 1$, per la formula di Grassmann si ha $\dim(U+V) = 3$, pertanto $U + V = \mathbb{R}^3$. Basta dunque scegliere una base qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ (ad esempio la base canonica).

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z) = (x - y, 2x - 2y, z).$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f.
b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
c) Sia $W = \langle (0,0,1), (1,2,0) \rangle$. Mostrare che $f(W) \subseteq W$ e scrivere la matrice della restrizione $f_{|W} : W \to W$ rispetto ad una base fissata.

SVOLGIMENTO. a) $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y = 0, z = 0\} = \langle (1,1,0) \rangle$. $Im(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \rangle = \langle (1,2,0), (-1,-2,0), (0,0,1) \rangle = \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle$.

b) Poiché il nucleo di f non è banale essa non è iniettiva e dunque nemmeno suriettiva.

c) Si ha: $f(0,0,1) = (0,0,1) \in W$ e $f(1,2,0) = (-1,-2,0) \in W$. Pertanto la matrice di $f_{|W}$ rispetto alla base $\{(0,0,1), (1,2,0)\}$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + 2y + 3z - t = 0$.

a) Determinare una base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di U.
b) Sia F l'unico endomorfismo di U tale che $F(\mathbf{b}_1) = F(\mathbf{b}_2) = F(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$. Determinare $F(1,1,1,6)$.
c) Stabilire se F è diagonalizzabile.
d) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate rispetto alla base B.

e) Scrivere le equazioni degli autospazi di F nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^4$.

SVOLGIMENTO. a) Scegliamo $\mathbf{b}_1 = (1,0,0,1)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,0,2)$, $\mathbf{b}_3 = (0,0,1,3)$.

b) Poiché $(1,1,1,6) = \mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3$, abbiamo $F(1,1,1,6) = F(\mathbf{b}_1)+F(\mathbf{b}_2)+F(\mathbf{b}_3) = 3(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3) = (3,3,3,18)$.

c) F ha nucleo di dimensione 2 generato dai vettori $\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_3$ che sono linearmente indipendenti. Il vettore $(1,1,1,6)$ è autovettore di autovalore 3. Inoltre 0 è autovalore di molteplicità geometrica 2 e di molteplicità algebrica 2. Possiamo concludere che F è diagonalizzabile.

d) Rispetto alla base B abbiamo $V_0 = \{(x,y,z)_B \mid x+y+z=0\}$ e $V_3 = \{(x,y,z)_B \mid x=y=z\}$.

e) Rispetto alla base canonica abbiamo $V_0 = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z=0; y+2z-t=0\}$ e $V_3 = \{(x,y,z,t) \mid x-y=0, y-z=0, 6z-t=0\}$.