Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Quinto Appello
Bologna, 20 gennaio 2014
TEMA n.1

Esercizio 1. (7 punti)

i) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare Σ_k, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni e, quando possibile, si determinino tali soluzioni:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

ii) Si determinino ora, quando possibile, le soluzioni del sistema lineare Σ_k, supponendo che esso sia un sistema nelle incognite x, y, z, t.

Esercizio 2. (6 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}, \quad T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2, y + z = 0\}.$$

a) Stabilire se S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$;

b) determinare, se possibile, un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, diverso da $\mathbb{R}^4$, che contenga propriamente S;

c) determinare, se possibile, un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, diverso da $\mathbb{R}^4$, che contenga propriamente T.

Esercizio 3. (11 punti) Sia D la derivata rispetto alla variabile x dei polinomi in x di grado minore o uguale a 3: $D : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$:

$$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2.$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di D;

b) fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, scrivere la matrice di D rispetto a $\mathcal{B}$;

c) stabilire se 0 è autovalore di D;

d) determinare autovalori e autovettori di D;

e) stabilire se l'endomorfismo D è diagonalizzabile.

Esercizio 4. (6 punti)

a) Stabilire se $[2]_{15}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{15}$. In caso affermativo determinarne l'inverso.

b) Stabilire se la congruenza lineare $2x \equiv 7 \pmod{15}$ ammette soluzioni in $\mathbb{Z}$. In caso affermativo determinare tali soluzioni.