Corso di Laurea in informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA.
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Svolgimento Primo appello
Bologna, 29 maggio 2014
Tema n.1

Esercizio 1. (8 punti) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per cui esso ammette soluzioni.

Svolgimento. La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right).$$

Riduciamo la matrice $(A|b)$ in forma a scala:

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{array}\right),$$

Osserviamo che $k^2 + k - 2 = 0$ per $k = -2$ o $k = 1$. Si ha dunque: per ogni $k \neq -2, 1$, $rg(A) = rg(A|b) = 3$, pertanto il sistema ammette una sola soluzione che determiniamo risolvendo per sostituzioni successive dal basso il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ (k-1)y + (1-k)z = 0 \\ (2-k-k^2)z = 1-k \end{cases}$$

Per $k \neq -2, 1$ il sistema ha dunque l'unica soluzione: $(1/(k+2), 1/(k+2), 1/(k+2))$.
Per $k = -2$ la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

pertanto $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A|b)$ e il sistema non ammette soluzioni.
Infine, per $k = 1$ la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

quindi $rg(A) = rg(A|b) = 1$. Il sistema ammette infinite soluzioni che si ottengono risolvendo l'equazione: $x + y + z = 1$ cioè le infinite soluzioni $\{(x, y, 1 - x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. (10 punti) Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a - b + c - d = 0, a + 2b - 2c + d = 0 \right\}$.

a) Calcolare la dimensione di S e determinare una sua base $\mathcal{B}$.

b) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$.

c) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale T di $M_2(\mathbb{R})$, $T \neq M_2(\mathbb{R})$, contenente propriamente S. Esiste un solo sottospazio T come richiesto?

d) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ avente S come nucleo ed una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ avente S come immagine. Determinare la forma esplicita delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Svolgimento.

a) Il sistema di equazioni che definisce S ha rango 2 quindi $\dim(S) = 4 - 2 = 2$. Sommando alla seconda la prima equazione moltiplicata per 2 si ottiene la relazione $3a - d = 0$ che, sostituita nella prima equazione dà: $c = 2a + b$. L'elemento generico di S è dunque della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a+b & 3a \end{pmatrix}$. Di conseguenza $S = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$. Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti dal momento che non sono una multiplo dell'altra, perciò individuano una base di S che indicheremo con $\mathcal{B}$.

b) Per completare $\mathcal{B}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ basterà aggiungere a $\mathcal{B}$ due matrici in modo da ottenere 4 matrici linearmente indipendenti. Possiamo aggiungere le matrici $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per verificare la lineare indipendenza delle 4 matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, basta scriverle in coordinate rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ e verificare che il rango della matrice che ha sulle righe tali vettori coordinate sia 4:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

c) Poiché $\dim(S) = 2$ e $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, un sottospazio T come richiesto ha dimensione 3. Esso deve contenere tutti i vettori di S quindi, in particolare, i vettori della base $\mathcal{B}$, ed un vettore da essi linearmente indipendente. Possiamo scegliere, ad esempio, $T = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$. Naturalmente, potremmo sostituire il vettore $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con qualsiasi altro vettore di $M_2(\mathbb{R})$ non appartenente ad S, perciò esistono infiniti sottospazi T soddisfacenti le condizioni richieste.

d) Una applicazione $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ avente S come nucleo è, ad esempio, la funzione $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b + c - d, a + 2b - 2c + d, 0, 0)$ (per accorgersene basta calcolare il nucleo di tale funzione f).

Una funzione $g : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ avente S come immagine è, ad esempio,

$g(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+b & 3a \end{pmatrix}$.

Dal momento che $ker f = S$ e $Im g = S$, si ha $f \circ g = 0$.

Abbiamo, infine,

$$g \circ f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g(a-b+c-d, a+2b-2c+d, 0, 0) = \begin{pmatrix} a-b+c-d & a+2b-2c+d \\ 3a-d & 3a-3b+3c-3d \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. (12 punti) Si consideri l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$F_a = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

a) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di f_a al variare di $a \in \mathbb{R}$;

b) stabilire per quali valori di a la funzione f_a è suriettiva;

c) stabilire per quali valori di a il vettore $(1, 1, 0)$ è autovettore di f_a;

d) per i valori di a trovati in c), stabilire se l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile;

e) stabilire se esistono valori di a tali che l'endomorfismo f_a sia descritto, rispetto ad una base opportuna, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento.

a) Abbiamo $rg(F_a) = 2$ per ogni $a \neq 2$ e $rg(F_a) = 1$ se $a = 2$. Di conseguenza, per ogni $a \neq 2$, $\dim(Imf_a) = 2$ e $Imf_a = \langle (2, a, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Per il Teorema delle Dimensioni, $\dim(\ker f_a) = 1$ e dalla matrice F_a deduciamo immediatamente che $\ker f_a = \langle (1, 0, 0) \rangle$.

   Per $a = 2$ abbiamo:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Di conseguenza $Imf_2 = \langle (2, 2, 0) \rangle$ e $\ker f_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

b) Dall'analisi appena fatta deduciamo che f_a non è suriettiva per alcun valore di a poiché $\dim(Imf_a) \leq 2$.

c) Per stabilire se $(1, 1, 0)$ è autovettore di f_a usiamo la definizione di autovettore richiedendo che $f_a(1, 1, 0) = \lambda(1, 1, 0)$:

$$F_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   vale a dire:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Possiamo concludere che $(1, 1, 0)$ è autovettore di f_a per $a = 2$.

d) La matrice F_2 è triangolare superiore pertanto i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale: 0 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1. Sappiamo già che $\dim V_0 = \dim(\ker f_2) = 2$, cioè 0 ha molteplicità geometrica due. Di conseguenza l'endomorfismo f_2 è diagonalizzabile.

e) Due matrici che descrivono lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse hanno necessariamente lo stesso rango e gli stessi autovalori. La matrice B ha autovalori 0, 0, 2 e la matrice F_a ha tali autovalori solo per $a = 0$ oppure $a = 2$. Tuttavia la matrice B ha rango 2, la matrice F_2 ha rango 1 e la matrice F_0 ha rango 2. Dunque la matrice F_a può descrivere lo stesso endomorfismo descritto da B solo per $a = 0$. In tal caso, essendo F_0 la matrice di f_0 rispetto alla base canonica, si ha: $f_0(1,0,0) = (0,0,0)$, $f_0(0,1,0) = (2,0,0)$, $f_0(0,1,0) = (0,0,2)$. La matrice di f_0 rispetto alla base $\{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ è dunque B.