Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA.
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Sesto appello
Bologna, 16 febbraio 2015

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} y + z = k \\ 2x + 3y + 7z = 5 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

(i) Stabilire per quali valori del parametro k il sistema ammette soluzioni.

(ii) Quando possibile determinare tali soluzioni.

Esercizio 2. (11 punti) Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0\}.$$

1) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

2) Stabilire se è possibile determinare una base di $M_2(\mathbb{R})$ costituita da elementi di W.

3) Determinare una base di W e completarla in una base di $M_2(\mathbb{R})$ in due modi diversi.

4) Determinare, se possibile, due sottospazi S e T di W tali che $S \cap T = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ e descrivere ciascuno di essi mediante un sistema di equazioni lineari.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ al variare del parametro reale a:

$$f_a(x, y, z) = (x + y + az, ax + y + z, x + y + az).$$

1) Determinare la matrice associata ad f_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

2) Determinare una base di $ker f_a$ ed una base di $Im f_a$ al variare di a.

3) Stabilire per quali valori di a l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata. Tutte le risposte non giustificate verranno ignorate.