Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA.
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Quinto appello
Bologna, 16 gennaio 2015

Esercizio 1. (9 punti) Si consideri il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5k + 35 \\ 7x + (2-k)z = 9 - 8k \\ 2x + 2z = 4 - 2k \end{cases}$$

(i) Stabilire per quali valori del parametro k il sistema ammette soluzioni.

(ii) Quando possibile determinare tali soluzioni.

Esercizio 2. (10 punti) In $\mathbb{R}^3$ siano $S = \langle(1,1,1),(2,1,0)\rangle$ e $T_k = \langle(1,0,-1),(k,1,k),(1+k,1,k-1)\rangle$, con $k \in \mathbb{R}$.

1) Calcolare la dimensione di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

2) Stabilire per quali valori di k il sottospazio T_k è contenuto in S.

3) Stabilire per quali valori di k il sottospazio S è contenuto in T_k.

4) Determinare una base di $S \cap T_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$:

$$f(x,y,z,t) = (2y, 2x, t, z).$$

1) Determinare una base di $ker f$ ed una base di $Im f$.

2) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

3) Determinare autovalori ed autovettori di f.

4) Stabilire se f è diagonalizzabile.

5) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In caso affermativo determinare $\mathcal{B}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata. Tutte le risposte non giustificate verranno ignorate.