

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 03/06/2015
TEMA 2

(1) **Esercizio 1** (10 punti)

Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, w :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4w = 0 \\ 2x + z - 3w = 0 \\ -2y + az + w = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di a in \mathbb{R} , stabilire per quali valori di a il sistema è risolubile e, quando possibile, determinare le sue soluzioni.

- (2) **Esercizio 2** (10 punti) Sia $U = \langle (-1, 2, 1, 0), (0, -1, -1, 1), (-1, 0, -1, 2) \rangle$
- (a) Calcolare la dimensione di U ed esibire una sua base.
 - (b) Determinare un sottospazio vettoriale V di \mathbb{R}^4 tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.
 - (c) Posto $W = \langle (1, 2, 0, -1), (-2, -2, -1, 3) \rangle$, determinare una base di $U + W$ ed una base di $U \cap W$.

(3) **Esercizio 3** (10 punti) Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che:

$$f_a(1, -1, 1) = (0, 0, 0), \quad f_a(1, a, 0) = (-1 + a, 0, 0), \quad f_a(0, 1, 0) = -(0, 1, 0).$$

- (a) Giustificare il fatto che l'endomorfismo f_a esiste ed è unico.
- (b) Calcolare la matrice $M_C^C(f_a)$ di f_a rispetto alla base canonica C di \mathbb{R}^3 (sia nel dominio che nel codominio).
- (c) Esistono valori di a tali che l'endomorfismo f_a ha un autovalore di molteplicità algebrica 2? Stabilire se, in tal caso, l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile.